# Exercice 1

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, on s'intéresse aux polynômes : $Q_n = (X+1)^n - X^n - 1$.

1. (a) À l'aide de la formule du Binôme de Newton, donner l'expression de $Q_n$ sous forme de somme.

   (b) Déterminer le degré de $Q_n$ ainsi que son monôme de plus haut degré.

2. Montrer que $X$ divise $Q_n$.

3. (a) Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $Q_n$ est divisible par $X+1$.

   (b) Le polynôme $Q_n$ peut-il être divisible par $(X+1)^2$ ?

4. On pose $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

   (a) Rappeler la valeur de $1 + j + j^2$.
   Développer $(X - j)(X - j^2)$.

   (b) Montrer que si $n$ s'écrit $6k - 1$ ou $6k + 1$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors $Q_n(j) = 0$.

   (c) Montrer que si $n$ s'écrit $6k+1$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors $j$ est racine double de $Q_n$.

   (d) Déduire des questions précédentes une factorisation de $Q_5$ et $Q_7$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

# Exercice 2

En fonction de $a \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ : $\left\{ \begin{array}{rl} (1+a)x - y - z & = 0 \\ -2x + (2+a)y + 3z & = 0 \\ 2x - 2y + (-3+a)z & = 0 \end{array} \right.$ .