

Exercice 1

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$, et que $\alpha \in]1, 2[$.
2. A l'aide de l'Inégalité des Accroissements Finis, montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, |f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$$

3. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = 1 + \frac{1}{\sqrt{u_n}}$$

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 < u_n \text{ existe et } u_n \geq 1$$

4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2}|2 - \alpha|^n$$