

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ -\ln(1-x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^* et déterminer f' sur \mathbb{R}^* .
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en zéro.
3. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .
4. La fonction f est-elle deux-fois dérivable sur \mathbb{R} ?

Exercice 2

1. Démontrer que pour tout réel x , on a :

$$1 + x \leq e^x$$

puis que :

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x$$

2. Démontrer que pour tout réel x de $] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$,

$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > -\frac{1}{x}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x - 2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on nommera I .
2. Dresser le tableau de variations de f sur I . Vous calculerez les limites aux bornes des intervalles.
3. Déterminer $f(I)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$.
4. Démontrer que :

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-x} \quad \text{et} \quad xf(x) \underset{x \rightarrow 0^-}{\rightarrow} 0$$