DM09 - pour le 17/11/14

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ -\ln(1-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et déterminer f' sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que f est prolongeable par continuité en zéro.
3. Montrer que la fonction f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction f est-elle deux-fois dérivable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

1. Démontrer que pour tout réel x, on a :
$$1 + x \leqslant e^x$$
puis que :
$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leqslant e^x$$
2. Démontrer que pour tout réel x de $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$,
$$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) > -\frac{1}{x}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x - 2}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f que l'on nommera I.
2. Dresser le tableau de variations de f sur I. Vous calculerez les limites aux bornes des intervalles.
3. Déterminer $f(I)$ et $f^{-1}(\mathbb{R}^+)$.
4. Démontrer que :
$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x} \qquad \text{et} \qquad xf(x) \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$$