Exercice 1

Déterminer le domaine de définition, puis de dérivabilité des fonctions suivantes, puis calculer la dérivée là où cela est possible :

1. $f(x) = (4-3x)^5$
2. $g(x) = \dfrac{(4x-3)^3}{3x^2+1}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$
4. $u(x) = \sqrt{4x^2-1}$
5. $v(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$
6. $w(x) = |\ln(x)|$
7. $y(x) = x|x|$

Exercice 2

Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par : $\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.

1. Etudier les variations de la fonction f. Dresser son tableau de variations en précisant les limites aux bornes de l'intervalle de définition.
2. Montrer que f réalise une bijection de $]0,1/2]$ dans un intervalle J à préciser. On note alors $g : J \to]0,1/2]$ la fonction réciproque de f. Dresser le tableau de variations de g.
3. On donne : $f\left(\dfrac{1}{2}\right) \simeq 0.8578$.

   Soit $n \geqslant 2$. Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet une unique solution dans $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$, que l'on notera u_n.
4. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geqslant 2}$.

Exercice 3

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera. Que peut-on dire de f^{-1} ?
2. Démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = 1 - f(x)^2$.
   Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et déterminer $(f^{-1})'$.
3. Déterminer explicitement f^{-1} et retrouver $(f^{-1})'$.