Exercice 1

Soit $n \geqslant 2$. En transformant $k\binom{n}{k}$ et $k(k-1)\binom{n}{k}$, calculer les sommes suivantes :

$$S = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}.$$

En déduire la valeur de $U = \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Exercice 2

Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont strictement positifs.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = a_n - b_n$ et $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.
   (a) Vérifier que (d_n) est une suite usuelle.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = 2^{2^n}$.
   (c) Déduire de (a) et (b) l'expression de a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier le produit $\prod_{k=0}^{n} \dfrac{a_k}{a_{k+1}}$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n} q_k = \dfrac{1}{2} q_{n+1}$.