DM01 - pour le 09/09/14

Exercice 1

On considère les assertions suivantes :

(a) $\exists x \in \mathbb{R} \; / \; \forall y \in \mathbb{R},\; x+y>0$

(b) $\forall x \in \mathbb{R},\; \exists y \in \mathbb{R},\; x+y>0$

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\; x+y>0$

Dire pour chacune d'elle si elle est vraie ou fausse et le prouver.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4} u_n$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_n = (3n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Exprimer pour tout entier naturel n, $(u_{n+2})^2 - (u_{n+1})^2$ en fonction de $u_{n+1} - u_n$.
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.