Le devoir comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

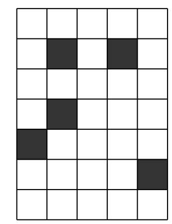
Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $J_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} (\tan t)^n dt$.

1. Préciser une primitive de la fonction $t \mapsto \tan t$ sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et calculer J_1. *(On donnera J_1 sous la forme $\alpha \ln(2)$, avec α à déterminer).*
2. Justifier que :
$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \ 0 \leqslant \tan(t) \leqslant 1$$
3. Montrer que la suite $(J_n)_{n \geqslant 1}$ est monotone, en déduire qu'elle est convergente.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $J_n + J_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$.
En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.
5. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k} = J_1 + (-1)^{n+1} J_{2n+1}$$
6. Prouver la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ et calculer la valeur de sa somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Exercice 2

On pourra donner (en justifiant) les résultats de cet exercice sous forme de sommes et/ou de produits d'entiers ou de coefficients binomiaux, sans chercher à les calculer.

Une grille de mots croisés est un tableau rectangulaire de longueur 7 et de largeur 5, constitué de 35 cases (dont 4 « coins »), les cases étant noircies ou non. La figure ci-dessous représente ainsi un exemple de grille avec 5 cases noires.



1. On s'intéresse tout d'abord aux grilles qui comportent exactement 5 cases noires.
   (a) Combien peut-on former de grilles différentes ?
   (b) Combien peut-on former de grilles différentes ayant au moins un coin noirci ?
   (c) Combien peut-on former de grilles différentes ayant exactement deux coins noircis ?
   (d) Combien peut-on former de grilles différentes ayant exactement une case noire par colonne ?
   (e) Combien peut-on former de grilles différentes ayant exactement une case noire par colonne et au plus une case noire par ligne ?
2. On s'intéresse à présent à toutes les grilles.
   (a) Combien peut-on former de grilles différentes en tout, c'est-à-dire avec n'importe quel nombre de cases noires ?
   (b) Combien de grilles différentes ont exactement une case blanche de plus que le nombre de cases noires ?
   (c) Combien de grilles différentes ont exactement quatorze cases noires et exactement deux lignes et deux colonnes sans case noire ?

Exercice 3

Le *humuhumunukunukuapua'a* est un poisson multicolore emblématique des îles hawaïennes. Le mot « HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA » comporte 9 U, 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P, ce qui fait 21 lettres. Les anagrammes considérées dans cet exercice n'ont pas nécessairment de sens.

1. Justifier que le nombre n d'anagrammes que l'on peut écrire avec 2 H, 2 M, 2 N, 2 K, 3 A et 1 P (c'est-à-dire sans prendre en compte le U) est donné par $n = \dfrac{12!}{(2!)^4\ 3!}$.

   (On pourra donner les résultats des questions suivants sour forme de produits d'entiers dans lesquels pourra apparaître le nombre n. Il n'est pas nécessaire de remplacer n par sa valeur, ni de simplifier les résultats).
2. Combien existe-t-il d'anagrammes différentes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?
3. Une anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA est dite « jolie » lorsqu'elle est sans U aux extrémités et sans U consécutifs, c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme :

   $$\bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet\ \mathrm{U}\ \bullet$$

   où chacun des 10 symboles $\bullet$ désigne une ou plusieurs lettres prises parmi les 12 lettres suivantes : 2H, 2M, 2N, 2K, 3A et 1P. Ainsi, le mot :

   $$\underbrace{\mathrm{MH}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{N}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{K}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{K}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{AP}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{A}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{H}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{M}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{N}}_{\bullet}\mathrm{U}\underbrace{\mathrm{A}}_{\bullet}$$

   est un exemple de jolie anagramme de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA.
   (a) Justifier qu'il est impossible que l'un des symboles $\bullet$ représente 4 lettres ou plus.
   (b) Combien existe-t-il de jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on trouve trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?
   (c) Combien existe-t-il de jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA où l'on ne trouve pas trois lettres consécutives qui ne sont pas des U ?
   (d) Combien existe-t-il de jolies anagrammes de HUMUHUMUNUKUNUKUAPUAA ?

Exercice 4

1. Soit x un réel strictement positif.
   Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt$.
   On notera donc dans la suite de l'exercice :
   $$\forall x \in]0,+\infty[,\ f(x) = \int_0^1 \frac{e^t}{x+t}dt$$
2. (a) Soient x et y deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$.
   Montrer que : $\forall t \in [0,1],\ \dfrac{e^t}{y+t} \leqslant \dfrac{e^t}{x+t}$.
   En déduire que $f(y) \leqslant f(x)$.
   (b) Quel est le sens de variation de la fonction f sur $]0,+\infty[$?
3. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$: $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{e-1}{x}$.
   (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
4. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $f(x) \geqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x+t}dt$.
   (b) En déduire la limite de f en 0.
5. A l'aide d'un changement de variable, montrer que pour tout réel $x > 0$,
   $$f(x) = e^{-x}\int_x^{x+1} \frac{e^u}{u}du$$
6. En déduire que :
   $$\forall x > 0,\ f(x) = e^{-x}\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) + \int_x^{x+1}\frac{e^u-1}{u}du\right)$$
7. Soit φ la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
   $$\varphi(u) = \begin{cases} \dfrac{e^u-1}{u} & \text{si } u \neq 0 \\ 1 & \text{si } u = 0 \end{cases}$$
   Démontrer que φ est continue sur $\mathbb{R}$.
8. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{e^u-1}{u}du$ admet une limite finie quand x tend vers 0, limite que l'on ne cherchera pas à évaluer.
9. En déduire un équivalent simple de f en 0.