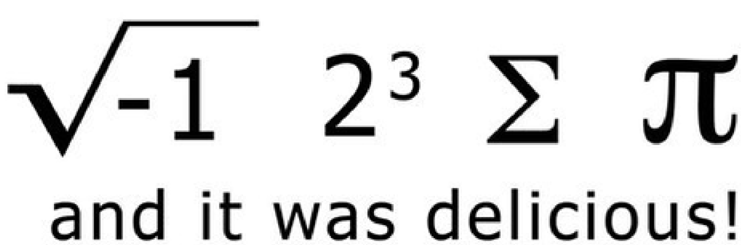
Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Vendredi 16 Mai 2014 - 08h-12h

L'épreuve comporte quatre exercices et un problème indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 3 pages dont celle-ci. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.



Exercice 1

Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \dfrac{e^n}{e^{2n}+1}$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Étudier le sens de variations de la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$.
2. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} e^{-n}$ converge et calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-k}$.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k, $u_k < e^{-k}$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n < \dfrac{1-e^{-n}}{e-1}$.
   (c) La suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ est-elle majorée ?
4. Montrer que la série de terme général u_n converge et justifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^k}{e^{2k}+1} \leqslant \frac{1}{e-1}$.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$.

1. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n < 1$.
   (b) Étudier le sens de variations de (u_n).
   (c) Montrer que (u_n) converge vers 1.
   (d) Quelle est la nature de la série de terme général u_n ?
2. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 1 - u_n$.
   (a) Déterminer la nature de la série $\sum \ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = -\ln(1+x_n)$.
   (c) En déduire la nature de la série de terme général x_n.
3. On note pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n = \dfrac{1}{x_n} = \dfrac{1}{1-u_n}$.
   (a) Montrer que la suite (y_n) est arithmétique de raison 1.
   (b) Déterminer alors x_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   Retrouver alors le résultat de la question 2(c).
   (c) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{x_n}{n!}$ converge et calculer sa somme.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension 2.
Soit f un endomorphisme de E tel que $(f - Id_E)^2 = 0$ et $f \neq Id_E$.

1. Montrer que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f et de Id_E.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id_E) = \mathrm{Ker}(f - Id_E)$.

Exercice 4

Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.

Problème

Partie A

On considère $E = \mathbb{R}_5[X]$, l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 5. On rappelle que $(1, X, X^2, X^3, X^4, X^5)$ désigne la base canonique de E. On note $E_1 = Vect(X, X^3, X^5)$ et $E_2 = Vect(1, X^2, X^4)$.

1. Justifier que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E, i.e. que $E = E_1 \oplus E_2$.
2. (a) Montrer que l'application g qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme :
$$g(P) = (X^2 - 1)P'' + XP'.$$
définit une application linéaire sur E_2.
   (b) Calculer $g(a + bX^2 + cX^4)$ pour tous réels a, b, c. Justifier que g est un endomorphisme de E_2.
   (c) Déterminer des bases de $\mathrm{Ker}(g)$, $\mathrm{Ker}(g - 4Id_{E_2})$ et $\mathrm{Ker}(g - 16Id_E)$.
   (d) La réunion des trois bases précédentes constitue-t-elle une base de E_2 ?
3. On considère l'application f qui à tout polynôme $P \in E_2$ associe le polynôme :
$$f(P) = 2XP - P'.$$
   (a) Montrer que f est une application linéaire de E_2 dans E_1.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.
   (c) En déduire que f est un isomorphisme de E_2 sur E_1.
   (d) Déterminer $f^{-1}(\alpha X + \beta X^3 + \gamma X^5)$ pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Partie B

La partie B est indépendante de la partie A, à l'exception de la question 4.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, non nécessairement de dimension finie. On désigne par E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, de sorte que $E = E_1 \oplus E_2$. On rappelle que tout vecteur $\overrightarrow{z}$ de E peut alors s'écrire de manière unique sous la forme $\overrightarrow{z} = \overrightarrow{z_1} + \overrightarrow{z_2}$ avec $\overrightarrow{z_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{z_2} \in E_2$.
On fixe g un endomorphisme de E_2 et f un isomorphisme de E_2 sur E_1.
À tout $\overrightarrow{x} \in E$ s'écrivant $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$, où $\overrightarrow{x_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{x_2} \in E_2$, on note :
$$F(\overrightarrow{x}) = f^{-1}(\overrightarrow{x_1}) + f(\overrightarrow{x_2}) + g(\overrightarrow{x_2}).$$

1. (a) Montrer que F est un endomorphisme de E.
   (b) Montrer que F est injectif.
   (c) Montrer que F est surjectif et exprimer $F^{-1}(\overrightarrow{y})$ pour $\overrightarrow{y} = \overrightarrow{y_1} + \overrightarrow{y_2} \in E$ avec $\overrightarrow{y_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{y_2} \in E_2$.
2. (a) On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{x} \in E$ tels que :
   - $\lambda \neq 0$,
   - $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_E}$,
   - $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}$ (où $\overrightarrow{x_1} \in E_1$ et $\overrightarrow{x_2} \in E_2$),
   - $F(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$.

   Montrer d'abord que $\overrightarrow{x_1} \neq \overrightarrow{0_E}$ et $\overrightarrow{x_2} \neq \overrightarrow{0_E}$, puis qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $g(\overrightarrow{x_2}) = \mu \overrightarrow{x_2}$.
   (b) Réciproquement, on suppose qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ et un vecteur $\overrightarrow{x_2} \in E_2$, tels que $\overrightarrow{x_2} \neq \overrightarrow{0_E}$ et $g(\overrightarrow{x_2}) = \mu \overrightarrow{x_2}$.
   Résoudre l'équation $F(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2}) = \lambda(\overrightarrow{x_1} + \overrightarrow{x_2})$ d'inconnue $(\overrightarrow{x_1}, \lambda) \in E_1 \times \mathbb{R}$.
3. On suppose dans cette question que E est de dimension finie, et on pose $n = \dim(E_1)$. Justifier que $\dim(E_1) = \dim(E_2) = n$ et $\dim(E) = 2n$.
4. On considère ici $E = \mathbb{R}_5[X]$ et les applications g et g définies dans la partie A. Calculer alors $F(X^k)$ pour tout $k \in [\![0, 5]\!]$.