Le devoir comporte 2 exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Notations:

On dit qu'une matrice M est symétrique (respectivement antisymétrique), si ${}^tM = M$ (respectivement si ${}^tM = -M$).

On note:

(i) $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Questions:

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On admettra le résultat pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
2. Montrer que
$$\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$
3. Montrer que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{S}_2(\mathbb{K})$.
4. Pour $n = 3$, déterminer une base et la dimension de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. On fera de même pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.
5. Pour n quelconque, montrer que $\dim \mathcal{S}_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
6. Pour n quelconque, donner la dimension de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 2

La partie B de cet exercice est indépendante de la partie A. La partie C nécessite les résultats de la partie A.

Dans la suite E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque. Pour un endomorphisme f de E et n un entier naturel, on note f^n pour $\overbrace{f \circ \cdots \circ f}^{n \text{ fois}}$ avec pour convention $f^0 = \mathrm{Id}_E$ (où Id_E est l'application identité de E).

On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des endomorphismes f de E, tel que
$$f^3 = f.$$

On appelle symétrie de E un endomorphisme de E, tel que
$$s^2 = \mathrm{Id}_E.$$

On appelle projecteur de E un endomorphisme de E, tel que
$$p^2 = p.$$

Partie A : Préliminaires

1. Soit s une symétrie de E, montrer que s est injective.
2. On suppose pour cette question que E est de dimension finie. Soit s une symétrie de E. Que dire du rang de s?
3. Soit s une symétrie de E, montrer que
$$E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E).$$
(*On remarquera que* $s^2 - \mathrm{Id}_E = (s - \mathrm{Id}_E) \circ (s + \mathrm{Id}_E)$.)
4. Soit p un projecteur de E
   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E) = \mathrm{Im}\, p$.

(b) Montrer que $s = 2p - \mathrm{Id}_E$ est une symétrie.

(c) En déduire
$$\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E.$$

5. Montrer que si f est une symétrie ou un projecteur, alors f est un élément de $\mathcal{D}$.
6. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall f \in \mathcal{D}, \quad f^n \in \mathcal{D}.$$

Partie B: Un cas particulier

Dans cette partie, on considère $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E défini par $f(x, y, z) = (2x - 2z, -y, x - z)$.

6. Pour tous (x, y, z) de E, calculer $f^2(x, y, z)$.
7. L'endomorphisme f est-il une symétrie ou un projecteur?
8. Montrer que f appartient à $\mathcal{D}$.
9. Déterminer le noyau et l'image de f. On précisera à chaque fois la dimension et une base.

Partie C: Retour au cas général

10. Soit f un élément de $\mathcal{D}$, montrer qu'il y a équivalence entre:
    (i) L'endomorphisme f est un automorphisme de E.
    (ii) L'endomorphisme f est une symétrie.
11. Soit f un endomorphisme de E. Quelle relation d'inclusion existe-t-il entre $\operatorname{Im} f$ et $\operatorname{Im} f^2$? Entre $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Ker} f^2$?
12. Soit f un élément de $\mathcal{D}$.
    (a) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$ et $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$.
    (b) Montrer que f^2 est un projecteur.
    (c) En déduire que
$$\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E.$$