Le devoir comporte 5 exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

1. Soient a, b, c trois réels donnés.
   Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\begin{cases} x + 2y - z &= a \\ -2x - 3y + 3z &= b \\ x + y - 2z &= c \end{cases}$$

   (on discutera des solutions suivant une certaine relation vérifiée par les réels a, b, c).

2. On pose : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = M - I_3$, la matrice I_3 représentant la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Calculer J^2, J^3. En déduire, sans démonstration, l'expression de J^n pour tout entier naturel naturel $n \geqslant 3$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$:

$$M^n = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2$$

   L'écriture obtenue est-elle encore valable pour les entiers $n = 0$ et $n = 1$?
   (c) En déduire l'écriture matricielle de M^n.

Exercice 2

Soient A et B les matrices données par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie A

1. On pose $F = BA$ et $G = AB$. Déterminer les matrices F et G.
2. On note J la matrice carrée d'ordre 3 dont tous les coefficients sont égaux à 1, et I la matrice identité d'ordre 3.
   (a) Montrer que $G = 5J + 3I$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ G^n = 3^{n-1}((6^n - 1)J + 3I)$.
3. (a) Démontrer que la matrice G est inversible et déterminer G^{-1}.
   (b) La formule du 2(c) est-elle vraie pour $n = 0$ et $n = -1$?
4. On désigne par $g_{i,j}$ le coefficient de la i-ième ligne et j-ième colonne de G^n. Vérifier que tous les coefficients $g_{i,i}$ de la diagonale ont la même valeur, notée d_n, et que les autres coefficients sont égaux entre eux, de valeur notée a_n. Démontrer que :

$$d_{n+1} = 8d_n + 10a_n \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = 13a_n + 5d_n$$

5. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F^n = BG^{n-1}A$.
   (b) En déduire explicitement la matrice F^n.

Partie B

Soit $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On pose $Y_k = AX_{k-1}$ et $X_k = BY_k$.

1. Déterminer Y_1, X_1 et Y_2.
2. (a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ X_n = F^n X_0$.
   (b) En déduire le réel α_n tel que $X_n = \alpha_n X_1$, puis le réel β_n tel que $Y_n = \beta_n Y_1$.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^6 + 27$.
2. Soit $Q = -X^5 - X^4 + 11X^3 - 7X^2 - 10X + 8$.
   Vérifier que 1 et -1 sont racines de Q et préciser leur ordre de multiplicité.
   En déduire une factorisation de Q en polynôme irréductibles.
3. Soit $R = X^4 + 2X^3 - 11X^2 + 8X - 60$.
   Vérifier que $2i$ est une racine de R. En déduire une factorisation de R en polynôme irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 : Polynômes de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul et soient $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ des réels distincts deux à deux et rangés dans l'ordre croissant. On définit n polynômes $F_1, \dots, F_n$ par :

$$\forall j \in [\![1, n]\!],\ F_j = \prod_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \frac{X - a_k}{a_j - a_k}$$

Par exemple, pour $n = 3$, on a alors :

$$F_1 = \frac{X - a_2}{a_1 - a_2} \times \frac{X - a_3}{a_1 - a_3}, \quad F_2 = \frac{X - a_1}{a_2 - a_1} \times \frac{X - a_3}{a_2 - a_3}, \quad F_3 = \frac{X - a_1}{a_3 - a_1} \times \frac{X - a_2}{a_3 - a_2}.$$

1. (a) Déterminer pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, le degré de F_j ainsi que ses racines.
   (b) Calculer pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, la valeur de $F_j(a_j)$.
2. Soit P un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$.
   On lui associe le polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ défini par :
   $$Q = \sum_{j=1}^{n} P(a_j) F_j.$$
   (a) Calculer pout tou $k \in [\![1, n]\!]$ la valeur de $Q(a_k)$.
   (b) En déduire que $P = Q$.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque. Démontrer qu'il existe un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $n - 1$ tel que :
   $$\forall k \in [\![1, n]\!],\ Q(x_k) = f(x_k).$$

Exercice 5 : Polynômes de Legendre

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme G_n par :

$$G_n(X) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X - 1)^{n-k} (X + 1)^k.$$

1. (a) Écrire sous leur forme usuelle G_0, G_1, G_2 et G_3.
   (b) Calculer, pour tout entier naturel n, $G_n(1)$.
   (c) Déterminer, en fonction de n, le degré de G_n et donner son coefficient dominant sous forme d'une somme.
   (d) En utilisant un changement d'indice, montrer que G_n a même parité que n.
2. (a) Vérifier que l'aide de la formule de Leibniz, que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ G_n(X) = \frac{1}{2^n n!} \left((X^2 - 1)^n \right)^{(n)}$$
   où $\left((X^2 - 1)^n \right)^{(n)}$ dérivée n-ième du polynôme $(X^2 - 1)^n$.
   (b) En déduire explicitement le coefficient dominant de G_n, puis la relation :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
   (c) Montrer alors que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ |G_n(x)| \leqslant \binom{2n}{n} \left(\frac{1 + |x|}{2} \right)^n$$
3. On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $U_n(X) = (X^2 - 1)^n$.
   (a) Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le polynôme $U_n^{(k)}$ admet 1 et -1 comme racines d'ordres de multiplicité $n - k$.
   (b) Vérifier que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$(X^2 - 1) U_n'(X) = 2nX U_n(X)$$
   (c) En dérivant $n + 1$ fois cette relation, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ (1 - X^2) G_n'' - 2X G_n' + n(n + 1) G_n = 0$$