Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^4 = (z-1)^4$$

Exercice 2

1. Soit x un réel tel que $0 < x < \pi$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left((2k+1)x\right) = \frac{(\sin(nx))^2}{\sin(x)}$$

2. En déduire l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions dans $]0,\pi[$ de l'équation :

$$\sin(x) + \sin(3x) - \sin(4x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \text{Arccos}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(x)\right)$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}$.
   (b) Étudier la parité et la périodicité de f sur $\mathcal{D}$.
   (c) Étudier la continuité de f sur $\mathcal{D}$.
2. (a) Justifier que f est dérivable sur $[0,\pi[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0,\pi[,\ f'(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{4-(\cos(x)-1)^2}}$$

   (b) Montrer que : $\forall h \in]0,\pi],\ f'(\pi - h) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + 2\dfrac{1-\cos(h)}{(\sin(h))^2}}}$.
   En déduire la limite de f' en π^-. Que peut-on en conclure ?
   (c) Étudier les variations de f sur $[0,\pi]$ et dresser le tableau de variations de f sur ce segment.
3. Montrer que : $\forall x \in [0,\pi[,\ f'(x) = \dfrac{\sin(x)}{2\sin(f(x))}$.
4. Démontrer qu'il existe un unique α dans $]0,\pi[$ tel que $\alpha + f(\alpha) = \pi$.

Exercice 4

Soit f la fonction définie par la relation : $f(x) = \dfrac{\text{Arcsin}(x)}{x^2}$.

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f, noté $\mathcal{D}$.
   (b) Étudier la parité de f.
   Dans la suite (graphe inclus), on étudie f sur $\mathcal{E} =]0,1]$.
2. Déterminer un équivalent de f en 0 et préciser la limite de f en 0^+. Que peut-on en déduire graphiquement ?
3. (a) Préciser l'ensemble de dérivabilité $\mathcal{E}'$ de f (inclus dans $\mathcal{E}$) et calculer f' sur $\mathcal{E}'$.
   (b) On note : $\forall x \in]0,1[,\ g(x) = x^3 f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 2\text{Arcsin}(x)$.
      i. Étudier les variations de g.
      ii. En déduire que g admet dans $]0,1[$ un zéro unique, noté α, tel que $\dfrac{1}{\sqrt{2}} < \alpha < 1$.
      iii. En déduire le tableau de variations de f sur $\mathcal{E}$.
4. On pose $\beta = \text{Arcsin}(\alpha)$.
   (a) Montrer que β est l'unique solution sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation $\tan(y) = 2y$.
   (b) Montrer que $1 < \beta < 1,2$
   (on donne les valeurs : $\tan(1) \asymp 1,6$ *et* $\tan(1,2) \simeq 2,6$*)*
5. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 2 \qquad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \text{Arctan}(2u_n)$$

   (a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :

$$u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \beta$$

   (b) Montrer que pour tout $n \geqslant 0$,

$$|u_{n+1} - \beta| \leqslant \frac{2}{5}|u_n - \beta|$$

   (c) En déduire que pour tout $n \geqslant 0$,

$$|u_n - \beta| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n$$