*Le devoir comporte trois exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.*

*Le sujet est rédigé sur une seule page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.*

*Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.*

---

## Exercice 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\varphi_n$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_n(x) = e^{nx} - 10e^{-x} + 3$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique réel $u_n$ tel que $\varphi_n(u_n) = 0$.
2. Calculer $u_0$ et $u_1$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\varphi_n(0)$.
   En déduire le signe de $u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $\varphi_n(u_{n+1})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   En déduire que la suite $(u_n)$ est décroissante.

## Exercice 2

1. Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(1+t) > \dfrac{t}{1+t}$.
2. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^x)$$

   Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. Calculer $f(\ln(2))$. Justifier que $f^{-1}$ est dérivable en $\ln(\sqrt{3})$ et donner la valeur de $(f^{-1})'(\ln(\sqrt{3}))$.

## Exercice 3

Soit $f$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x) - 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. (a) Montrer que $f$ est continue sur $[0, +\infty[$.
   (b) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0.
   En donner une interprétation graphique.
   (c) Etudier sur $]0, +\infty[$ les variations puis le signe de la fonction $g$ définie par $g : x \mapsto 2x - \ln(x) - 1$.
   (d) Dresser le tableau de variations de $f$ (on précisera les limites).
   (e) Etudier la nature de la branche infinie en $+\infty$.
   (f) Calculer $f(1)$. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ à l'aide des informations contenues dans les questions précédentes.
2. (a) Montrer que $f$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle $J$ que l'on précisera.
   (b) Etudier le sens de variation de $f^{-1}$ et déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
   (c) Justifier que pour tout entier naturel $n$, il existe un unique réel $x_n$ positif tel que $f(x_n) = n$.
   (d) Donner la valeur de $x_0$.
   (e) Montrer que la suite $(x_n)$ est croissante.