Le devoir comporte trois exercices et un problème indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur deux pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $$(I_1) \quad : \quad |x-3| \leqslant 5-x,$$
2. $$(I_2) \quad : \quad x-3 \leqslant \sqrt{5-x},$$
3. $$(E_1) \quad : \quad 2\ln(-x) = \sqrt{\exp(6)},$$
4. $$(E_2) \quad : \quad \ln(x+\sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2}-x) = 0,$$
5. $$(E_3) \quad : \quad e^{2x} + e^{-2x} = 4,$$
6. $$(E_4) \quad : \quad |\ln(x)-1| + |\ln(x)+1| = 2.$$

Exercice 2

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}.$$

1. Préciser le domaine de définition de la fonction f.
2. Déterminer le sens de variation de f sur chacun des intervalles de son domaine de définition.
   On pourra commencer par simplifier l'écriture de $\dfrac{x+1}{x-1}$ *pour* $x \in D_f$
3. Dresser le tableau de variations de f.
   (on admet que f admet des limites aux bornes de son domaine de définition, qui ne peuvent être que 0, 1 ou $+\infty$, on les placera aux bonnes places dans le tableau sans justification)
4. La fonction f est-elle majorée ? minorée ? Admet-elle un maximum ? un minimum ?
5. L'application $x \mapsto f(x)$ est-elle injective de D_f dans $\mathbb{R}$?
   Est-elle surjective ? bijective ?

Exercice 3

$$g(x) = x^{\ln(x)}.$$

1. Préciser le domaine de définition de la fonction g.
2. Déterminer le sens de variation de g sur chacun des intervalles de son domaine de définition.
   On pourra séparer l'étude sur $D_g \cap]-\infty, 1]$ *et* $D_g \cap [1, +\infty[$
3. Dresser le tableau de variations de g.
   (on admet que la seule limite possible de g aux bornes de son domaine de définition est $+\infty$)
4. La fonction g est-elle majorée ? minorée ? Admet-elle un maximum ? un minimum ?

Problème

Dans tout le problème, on prendra soin à la rédaction de tous les raisonnements par récurrence qui seront introduits.

On définit la **suite de Fibonacci** $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1, \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

1. Calculer les valeurs de F_2, F_3, F_4, F_5, F_6.
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n \geqslant n.$$
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n.$$
4. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = F_{2n} - 1.$$
5. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} F_k = F_{n+2} - 1.$$
6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant F_n \leqslant \left(\dfrac{7}{4}\right)^n$.
7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_{k+p} = F_{2n+p}.$$
(Dans l'hérédité, on pourra commencer par appliquer la formule de Pascal).
8. Soit (S_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{F_p}{2^{p+1}}$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
$$\frac{S_n}{2} = 2S_{n+2} - S_{n+1} - 1.$$
9. On note r_1 et r_2 les deux racines distinctes de l'équation $x^2 = x+1$, les deux racines existant bien puisque $\Delta = 5 > 0$.
Ces réels vérifient donc $r_1^2 = r_1 + 1$ et $r_2^2 = r_2 + 1$.
(Dans toute la question 8, on ne demande pas de calculer la valeur de r_1 et r_2, mais seulement d'utiliser leurs propriétés).
   (a) Déterminer deux réels λ et μ tels que :
$$\begin{cases} F_0 = \lambda + \mu \\ F_1 = \lambda\, r_1 + \mu\, r_2 \end{cases}.$$
   On donnera les valeurs de λ et μ en fonction de r_1 et r_2.
   (b) Montrer par une récurrence double qu'on a alors :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = \lambda \cdot (r_1)^n + \mu \cdot (r_2)^n.$$
10. On désigne par ϕ le réel, appelé **nombre d'or**, défini par :
$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$
   (a) Vérifier que ϕ est une solution de l'équation $x^2 = x + 1$.
   (b) Calculer $\dfrac{1}{\phi}$ en fonction de ϕ.
   (c) Soit p un entier naturel. Montrer que :
$$\frac{F_{p+2} \times \phi + F_{p+1}}{F_{p+1} \times \phi + F_p} = \phi.$$
   (Là encore, il est déconseillé d'utiliser la valeur de ϕ, il vaut mieux utiliser ses propriétés).
   (d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \phi < \dfrac{F_{2n}}{F_{2n-1}}$.
   (e) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < \phi - \dfrac{F_{2n+1}}{F_{2n}} < \dfrac{1}{F_{2n}F_{2n-1}}$.
   (f) On rappelle que, pour x réel, la notation $\mathrm{Ent}(x)$ désigne la partie entière de x.
   Pour tout $n \geqslant 1$, déduire de la question précédente la valeur de $\mathrm{Ent}\left(F_{2n}\phi\right)$ en fonction d'un élément de la suite $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$.