Le devoir comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur une seule page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)!}$$

1. Démontrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1 - 2^{n-1}}{n!\,2^{n-2}}$$

2. On souhaite désormais retrouver ce résultat par un calcul direct. On ne suppose donc plus connue la relation de la question 1. Soit (v_n) la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = n!\,u_n$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmético-géométrique.
   (b) En déduire une expression de v_n puis de u_n en fonction de n.
   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 2

Soit $n \geqslant 1$. Calculer $A_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1}\left(1 + \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}\right)$.

Exercice 3

Soit $n \geqslant 1$. On note : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}$.

1. Montrer qu'on a $S_n + T_n = 2^{2n}$ et $S_n - T_n = 0$.
   (On pourra essayer de reconnaître des formules du Binôme)
2. En déduire la valeur de S_n et la valeur de T_n.

Exercice 4

1. On fixe un entier $b \in \mathbb{N}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. On note alors pour tout $a \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(a)$:

$$\mathcal{P}(a) \ : \quad \text{“} \sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \binom{a+b}{n} \text{”}$$

   Montrer que pour tout $a \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathcal{P}(a)$ est vraie.
   (On pourra dans l'hérédité appliquer la formule de Pascal au moment opportun)
   La formule précédente est appelée la **formule de Vandermonde**.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

   A l'aide de la formule de Vandermonde, démontrer que $S_n = \binom{2n}{n}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.
   (a) À l'aide du changement d'indice $j = n - k$, exprimer T_n en fonction de S_n et en déduire que : $T_n = \dfrac{n}{2}\dbinom{2n}{n}$.
   (b) Simplifier le produit $k\binom{n}{k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
   Retrouver alors la valeur de T_n en utilisant la formule de Vandermonde.