Exercice 1 :

On pose pour tout entier naturel n, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$.

1. A l'aide d'un encadrement judicieux de I_n, déterminer la limite de la suite (I_n).
2. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}dx = 1$.
3. On pose pour tout entier naturel n : $J_n = nI_n$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$.
   (b) Montrer que pour tout réel $t \geqslant 0$, on a $0 \leqslant \ln(1+t) \leqslant t$.
   (c) En déduire la limite de (J_n), puis un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2 :

On pose pour $x > 0$, $f(x) = \frac{2}{x^2}\int_0^x \frac{t}{e^t+1}dt$ et $f(0) = \frac{1}{2}$.

1. (a) Montrer que : $\forall x > 0, \forall t \in [0, x]$, $\frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{e^t+1} \leqslant \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire que $\forall x > 0$, $\frac{1}{e^x+1} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$.
   (c) Montrer que f est continue à droite en 0.
2. Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et vérifier que pour tout $x > 0$, $f'(x) = -\frac{4}{x^3}g(x)$, où g est une fonction que l'on décrira.
3. Etudier les variations puis le signe de g.
   En déduire les variations de f sur $[0, +\infty[$.
4. (a) Montrer que $\forall t \in [0, +\infty[,\ \frac{t}{e^t+1} \leqslant 1$.
   (b) En déduire la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.