Exercice 1 :

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} k^2}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad w_n = v_n - \ln(n)$$

1. (a) Montrer que : $\ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x^2}{2} + \underset{x \to 0}{o}\left(x^2\right)$.

   (b) En déduire que, au voisinage de $+\infty$,
   $$w_n - w_{n+1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$$

2. (a) Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 1} (w_n - w_{n+1})$ converge.

   (b) En déduire que la suite (w_n) converge. On note γ sa limite.

3. (a) Rappeler l'expression explicite de u_n pour tout $n \geqslant 1$.

   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge.

4. (a) Déterminer trois réels a, b et c tels que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$$

   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1} = v_{2n+1} - \frac{1}{2} v_n - 1$.

   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} u_k = 24(v_n - v_{2n+1}) + 24 - \frac{6n}{n+1}$$

5. En utilisant la convergence de la suite (w_n), calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ en fonction de $\ln(2)$.