Exercice 1 :

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
2. On pose pour $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.
   (a) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$,
   $$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$$
   (b) Donner alors un équivalent de S_n quand $n \to +\infty$.

Exercice 2 :

1. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{4n^2-1}$ converge.
2. Déterminer deux réels a et b tels que :
   $$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{4n^2-1} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$$
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice 3 :

Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n^2-n}{3^n}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 2^{2n+1} 5^{-n+1}$$