Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$$

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Par l'absurde, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 2 :

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$$

Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3 :

Comparer u_n et v_n au vois. de $+\infty$ à l'aide des symboles $\sim$ ou o :

1. $u_n = n^4 + n^3 - 2n + 1$ et $v_n = (\ln(n))^{20} - 3(\ln(n))^3 + 4$.
2. $u_n = \sqrt{\dfrac{n+1}{\ln(n)}}$ et $v_n = \dfrac{\sqrt{n}+1}{\ln(\sqrt{n})}$.
3. $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = \sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2-1} - 2n$.