

Exercice 1 :

1. Soient θ et θ' deux nombres réels.
Factoriser $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$ par $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$.
Donner le résultat sous la forme $\rho e^{i\alpha}$ avec ρ et α des réels.
2. A l'aide de cette méthode, en déduire la forme exponentielle des nombres complexes :

$$z_1 = 1 + e^{i\pi/3}, \quad z_2 = e^{4i\pi/3} - 1, \quad z_3 = e^{-i\pi/3} + e^{i\pi/4}$$

Exercice 2 :

1. Mettre sous forme trigonométrique $z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$.
2. Mettre sous forme trigonométrique $z_2 = 1 - i$
3. En déduire la forme trigonométrique de $\frac{z_1}{z_2}$, puis les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 3 :

Soit z un nombre complexe de module 1. Montrer que :

$$\frac{i\bar{z} - 1}{z - i} = -\bar{z}$$