Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$.
Soit (u_n) la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que la proposition $\mathcal{P}(n)$: "u_n existe et $u_n \geqslant 0$" est vraie.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
   On note α la solution positive. Montrer que $\alpha \leqslant 1$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$
4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4}|u_n - \alpha|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.

Exercice 2 :

Déterminer le développement limité à l'ordre indiqué au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

- $f(x) = e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 4
- $g(x) = \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ à l'ordre 2.
- $h(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 3.