Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1+e^x}{2+e^x}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{3}{4}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{3}{4}\right)$.

Exercice 2 :

On note n un entier naturel non nul fixé. On note alors :

$$(E_n) \quad : \qquad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \cdots + \frac{1}{x+2x} = 1$$

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{x+k} - 1$.

1. Justifier que f_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ et dresser son tableau de variations sur $]0,+\infty[$.
2. Justifier que l'équation (E_n) admet une unique solution x_n sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que pour tout $x > 1$, on a : $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) \leqslant \frac{1}{x-1}$.
4. En déduire que pour tout réel x strictement positif, on a :
$$\ln\left(1+\frac{2n}{x}\right) \leqslant f_n(x) + 1 - \frac{1}{x+2x}$$
5. En déduire que pour tout $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant \frac{2n}{e-1}$.