Exercice 1

1. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \ldots, n\}$,

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}$$

   (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

2. Calculer de même pour tout $n \in \mathbb{N}$ la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Exercice 2

Soit $(a_k)_{k\geqslant 1}$ une suite de réels.

On pose $A_0 = 1$ et pour tout $p \geqslant 1$, on pose : $A_p = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(1-a_k)$.

1.(a) Exprimer pour $p \in \mathbb{N}$, A_{p+1} en fonction de A_p et a_{p+1}.

(b) Montrer par récurrence que :

$$\forall p \geqslant 1,\ A_p + \sum_{k=1}^{p} a_k A_{k-1} = 1$$

2. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on suppose désormais que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_k = \dfrac{k}{n}$.

(a) Calculer A_n.

(b) Montrer que pour tout $p \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a :

$$A_p = \frac{p!}{n^p}\binom{n-1}{p}$$

(c) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{n^k}\binom{n-1}{k-1} = 1$.