Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 2^{1-n} \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2^n u_n$.

1. Montrer que la suite (w_n) ainsi définie est arithmético-géométrique.
2. En déduire la valeur de w_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire l'expression de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{9} u_k$.

Exercice 2

On pose pour tout $n \geqslant 2$,

$$S_n = 1 \times 3 + 2 \times 4 + 3 \times 5 + \cdots + (n-1)(n+1)$$

1. Ecrire S_n à l'aide du symbole $\sum$.
2. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 2,\ S_n = \frac{(n-1)n(2n+5)}{6}$$

3. Redémontrer le résultat du 2. en utilisant les propriétés du $\sum$ (sans récurrence).