

Interrogation - Espaces vectoriels

NOM PRENOM :

NOTE :

Exercice 1 : Questions de cours

1. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel.
Donner deux manières de montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E .

2. Soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k)$ une famille de vecteurs de E .
 - (a) Que veut dire " \mathcal{B} est une famille génératrice de E "?

 - (b) Que veut dire " \mathcal{B} est une famille libre de E "?

3. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel.

4. Donner au choix deux manières de montrer que " F et G sont supplémentaires dans E "

Exercice 2

On considère ici que $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 3x - 2y - z = 0\}$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E , donner une base de F et sa dimension.

2. Soit $G = Vect(\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 1, -1)$.

Déterminer la dimension de G .

3. Déterminer $F \cap G$ (on donnera une base et sa dimension).

4. Calculer $\dim(F + G)$ et en déduire l'ensemble $F + G$.

Exercice 3

On considère ici que $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Qu'appelle-t-on la base canonique de E ?

2. (a) Soit $G = \{P \in E / P(-1) = 0\}$. Préciser une base et la dimension de G .

(b) Soit $H = \text{Vect}(X + X^2 + X^3)$. Préciser la dimension de H .

(c) Montrer que $G \cap H = \{0\}$. Les ensembles G et H sont-ils supplémentaires dans E ?

3. (a) Soit la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1(X) = X^2$, $P_2(X) = X^2 + 1$, $P_3(X) = X^3 - X + 1$.
Montrer que la famille \mathcal{F} est libre.

(b) En utilisant un/des polynôme(s) de la base canonique, compléter la famille \mathcal{F} en une base de E .

4.

Exercice 4

On considère ici que E est l'ensemble des fonctions définies sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} .

On note $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto \cos(x)$, $f_2 : x \mapsto \sin(x)$.

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre dans E .