Interrogation - Espaces vectoriels

NOM PRENOM : NOTE :

Exercice 1 : Questions de cours

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   Donner deux manières de montrer qu'une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ une famille de vecteurs de E.
   (a) Que veut dire "$\mathcal{B}$ est une famille libre de E" ?
   (b) Que veut dire "$\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E" ?

3. Donner la définition de la dimension d'un espace vectoriel.

4. Donner au choix deux manières de montrer que "F et G sont supplémentaires dans E"

Exercice 2

On considère ici que $E = \mathbb{R}^3$.

1. Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x - y = 0\}$.
   Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E, donner une base de F et sa dimension.

2. Soit $G = Vect(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u} = (1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (1, 0, 2)$.
   Déterminer la dimension de G.

3. Déterminer $F \cap G$ (on donnera une base et sa dimension).

4. Calculer $\dim(F + G)$ et en déduire l'ensemble $F + G$.

Exercice 3

On considère ici que $E = \mathbb{R}_3[X]$.

1. Qu'appelle-t-on la base canonique de E ?

2. (a) Soit $G = \{P \in E \ / \ P(1) = 0\}$. Préciser une base et la dimension de G.

   (b) Soit $H = Vect(1 + X + X^2 + X^3)$. Préciser la dimension de H.

   (c) Montrer que $G \cap H = \{0\}$. Les ensembles G et H sont-ils supplémentaires dans E ?

3. (a) Soit la famille $\mathcal{F} = (P_1, P_2, P_3)$ où $P_1(X) = X^2, P_2(X) = X^2 - 1, P_3(X) = X^3 + X + 1$.
   Montrer que la famille $\mathcal{F}$ est libre.

   (b) En utilisant un/des polynôme(s) de la base canonique, compléter la famille $\mathcal{F}$ en une base de E.

4.

Exercice 4

On considère ici que E est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On note $f_0 : x \longmapsto 1$, $f_1 : x \longmapsto e^x$, $f_2 \ : x \longmapsto e^{2x}$.

Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre dans E.