Exercice 1

On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle que $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ est une base de E.
Soit f l'application qui à tout polynôme $P(X)$ de E associe le polynôme $Q = f(P)$ où Q est la dérivée seconde du polynôme $(X^2 - X)P(X)$:

$$f(P) = (\,(X^2 - X)P(X)\,)''$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de E.

   (b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est : $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

   (c) Montrer sans calcul que f est un automorphisme de E.

2. (a) Donner les valeurs propres de f, puis en déduire que f est diagonalisable.

   (b) Déterminer les sous-espaces propres de f.

   (c) En déduire une matrice inversible P dont la première ligne ne contient que des "1" telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

Exercice 2

On considère pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ f_n(t) = \frac{e^{-t}}{1 + t^n}$$

1. Soit $n \geqslant 2$ fixé.

   (a) Justifier que f_n est bien dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

   (b) Etudier les variations de la fonction f_n, préciser sa limite en $+\infty$ et sa valeur en 0.

   (c) Montrer que pour tout réel t strictement positif,

   $$f_n(t) \leqslant \frac{1}{t^n}.$$

   (d) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente, puis que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(t)dt$ est convergente.

2. On pose pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,

   $$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt.$$

   On a démontré dans la question 1 que chacune de ces intégrales est convergente. La suite (I_n) est donc bien définie.

   (a) Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^{+\infty} f_n(t)dt = 0$.

   (b) Montrer que pour tout réel t positif, $0 \leqslant e^{-t} - f_n(t) \leqslant t^n$.

   (c) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)dt = 1 - \frac{1}{e}$.

   (d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

3. (a) Pour tout réel t positif, déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$.
   On distinguera pour cela les cas $t < 1$, $t = 1$ et $t > 1$.

   (b) Dès lors, on définit sur $\mathbb{R}^+$ une fonction h définie par :

   $$\forall t \in [0, +\infty[,\ h(t) = \lim_{n\to+\infty} f_n(t)$$

   Donner l'allure de la courbe représentative de h dans un repère orthonormé (On donne $e^{-1} \approx 0.4$).
   La fonction h est-elle continue ?

   (c) Étudier la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)dt$.

   (d) A-t-on $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(t)\right) dt = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(t)dt\right)$?

Exercice 3

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice :

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres. Donner les sous-espaces propres correspondants.
   (b) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable ?
2. On suppose à présent que $a > 0$.
   (a) Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ qui sont solutions de l'une des équations :
   $$\lambda^2 = (a-1)^2 \qquad \text{ou} \qquad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$$
   (b) En déduire la seule valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible. Pour cette valeur, $A(a)$ est-elle diagonalisable ?
3. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   (a) Montrer que $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.
   (b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

Exercice 4

On considère, pour tout x tel que l'expression ait un sens :

$$F(x) = \int_{x^2}^{+\infty} e^{-t^3} dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction F.
2. Étudier la parité et les variations de F.
3. Montrer que F est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et déterminer sa dérivée.
4. Déterminer la limite de F en $+\infty$, puis de $x^2F(x)$ en $+\infty$.
5. Montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} F(x)dx$.