Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Lundi 27 Mai 2013 - 08h-12h

L'épreuve comporte deux exercices et deux problèmes indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 5 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Une erreur peut devenir exacte, selon que celui qui l'a commise s'est trompé ou non.

Pierre Dac

Exercice 1

Dans ce problème, E désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2. On rappelle qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

On note $\mathcal{B} = (1, X, X^2)$ sa base canonique et I_3 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Pour tout polynôme P de E, on note P' son polynôme dérivé. Enfin, f désigne l'application qui, à tout polynôme P de E, associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (2X + 1)P(X) - (X^2 - 1)P'(X)$$

1. (a) Calculer $f(1), f(X), f(X^2)$.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Déterminer la matrice A représentant f dans la base $\mathcal{B}$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. L'application f est-elle un isomorphisme de E ?
3. (a) Déterminer $\mathrm{Ker}(A - I_3)$, $\mathrm{Ker}(A + I_3)$ et $\mathrm{Ker}(A - 3I_3)$.
   (b) Quelles sont les valeurs propres de la matrice A ? Justifier que l'endomorphisme f est diagonalisable.
   (c) Déterminer alors une base $\mathcal{B}'$ de E dans laquelle la matrice de f soit diagonale.

Exercice 2

Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifie : $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = 0$.

1. Justifier que f admet un minimum et un maximum sur $[0, 1]$.
   On les note : $a = \min\limits_{t\in[0,1]} f(t)$ et $b = \max\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.
2. Montrer que $a \leqslant 0$ et $b \geqslant 0$.
3. En déduire qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$.
4. Calculer $\displaystyle\int_0^1 (f(t) - a)(b - f(t))dt$ et en déduire l'inégalité : $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt \leqslant -ab$.
5. On pose pour tout $x \in [0, 1]$, $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f^2(t)dt + af(x)$.
   Déduire des questions précédentes l'existence d'un $d \in [0, 1]$ tel que $\varphi(d) = 0$.

Problème 1

Partie 1 - Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\ln(1+2x)}{x}-1 & \text{si } x\in\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup\,]0,+\infty[\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$$

1. Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.
2. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
3. Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.
4. Prouver l'existence d'une fonction h telle que :

$$\forall x\in\left]-\frac{1}{2},0\right[\cup\,]0,+\infty[\,,\quad f'(x)=\frac{h(x)}{x^2}$$

   Étudier les variations de h, puis en déduire le tableau de variations de f.
5. Montrer que f s'annule en un unique point α (on admettra que $\alpha\simeq 1,26$).
6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Partie 2 - Étude d'une suite convergente

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases}u_0>0\\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\ln(1+2u_n)=g(u_n)\end{cases}$$

7. Vérifier que la suite (u_n) est strictement positive.
8. On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite ℓ ?
9. On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0,\alpha]$.
   (a) Montrer que pour tout entier naturel n, u_n est dans l'intervalle $]0,\alpha]$
   (b) Puis, montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et convergente vers α.
   (c) Prouver, de manière analogue, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α si on suppose u_0 dans l'intervalle $]\alpha,+\infty[$.
10. On pose $u_0=1$.
   (a) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$|u_{n+1}-\alpha|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)|u_n-\alpha|$$

   (b) En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n-\alpha|\leqslant\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Partie 3 - Étude d'une primitive de f

On pose, pour x appartenant à l'intervalle $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

11. Étudier les variations de F sur son ensemble de définition.
12. A l'aide de la question 1, montrer que $F(x)$ est équivalent à x pour x au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente à la courbe représentative de F au point d'abscisse $x = 0$.
13. (a) Donner un équivalent de f au voisinage de $+\infty$.
    (b) Justifier qu'il existe un réel $A > 0$ tel que $\forall x > A, f(x) \leqslant -1/2$.
    (c) En déduire la limite de $F(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
14. (a) Donner un équivalent de f au voisinage de $-\frac{1}{2}$.
    (b) Calculer $\int_x^0 \ln(1+2t)dt$ pour tout $x \in]-1/2, 0[$.
    (c) En déduire que $F(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $-\frac{1}{2}^+$.
    (d) Le prolongement de F est-il dérivable à droite de $-\frac{1}{2}$?
15. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-0.5	-0.25	0.5	1	α	2	4	5
$F(x)$	-1.14	-0.33	0.3	0.43	0.45	0.37	-0.31	-0.80

Donner l'allure de la représentation graphique de F. On placera en particulier les tangentes à la courbe aux points d'abscisses $x = 0$ et $x = -\frac{1}{2}$.

Problème 2

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel réel de dimension n, avec $n \geqslant 2$. Si u est un endomorphisme de E, pour tout entier naturel k, on note u^k l'endomorphisme défini par récurrence par $u^0 = Id_E$ l'endomorphisme identité de E, et $u^{k+1} = u^k \circ u$.

Partie 1

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est égal à 2.
On considère un endomorphisme f de E vérifiant $f^2 = 0$ et $f \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe un vecteur $\overrightarrow{x}$ de E tel que $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))$ soit une base de E.
2. En déduire la matrice associée à f dans la base $\mathcal{B}$.

Partie 2

Dans cette partie, on suppose que l'entier n est égal à 4, et on cherche tous les endomorphismes u de E qui vérifient l'équation "$u^2 = -Id_E$".

Supposons donc que f soit un endomorphisme f de E tel que $f^2 = -Id_E$.

3. Montrer qu'il n'existe aucun vecteur $\overrightarrow{x}$ non nul de E et de scalaire λ tel que $f(\overrightarrow{x}) = \lambda\overrightarrow{x}$.
4. Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur non nul de E. Montrer que la famille $(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}))$ est libre.
   On note F le sous-espace vectoriel engendré par cette famille. Quelle est la dimension de F ?
5. (a) Montrer qu'il existe une base de E de la forme $(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$
   (b) Soit G le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(\overrightarrow{z_1}, \overrightarrow{z_2})$, et soit $\overrightarrow{y}$ un vecteur non nul de G.
   Montrer que la famille $(\overrightarrow{x}, f(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{y}, f(\overrightarrow{y}))$ est libre.
6. Montrer que, dans une base bien choisie, la matrice associée à f s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie 3

On suppose dans cette partie que E désigne l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à 3.
On définit sur E l'application f qui, à tout polynôme P de E, associe $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = (1 + X^2)P''(X) - 2XP'(X)$$

où P' et P'' désignent respectivement les dérivées première et seconde de P.

7. Montrer que f est un endomorphisme de E.
8. (a) Écrire la matrice associée à f dans la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de E.
   (b) Déterminer les valeurs propres de f, ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.
   (c) L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
9. On cherche dans cette question les endomorphismes u de E qui vérifient l'équation "$u^2 = f$".
   Supposons donc que g soit un endomorphisme de E tel que $g^2 = f$.
   (a) Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice associée à g^2 s'écrit : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer que f et g commutent.
   (c) Montrer que pour tout $P \in \text{Ker}(f)$, on a $g(P) \in \text{Ker}(f)$.
   (d) Montrer que pour tout $P \in \text{Ker}(f + 2Id_E)$, on a $g(P) \in \text{Ker}(f + 2Id_E)$.
10. En utilisant les résultats des parties précédentes, donner la forme d'une matrice associée à g.