Le devoir comporte six exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{1}{(\sin(t))^2 + 4(\cos(t))^2} dt$$

On pourra considérer le changement de variable $u = \tan(t)$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$f^3 + f = 0, \qquad f \neq 0, \qquad f^2 + Id_E \neq 0$$

(où 0 désigne ici l'endomorphisme nul de E, Id_E désigne l'endomorphisme identité de E, et $f^3 = f \circ f \circ f$).

1. Vérifier que $(f^2 + Id_E) \circ f = 0$.
2. Montrer que :
   (a) $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f^2 + Id_E) = \{\overrightarrow{0_E}\}$
   (b) $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$
   (c) $\mathrm{Ker}(f^2 + Id_E) \neq \{\overrightarrow{0_E}\}$
   (d) $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Ker}(f^2 + Id_E) \iff f^2(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{u}$
   (e) $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + Id_E) = E$
3. On suppose désormais que $\dim(E) = 3$.
   On note $\overrightarrow{u}$ un élément de $\mathrm{Ker}(f^2 + Id_E)$ tel que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0_E}$.
   (a) Montrer qu'il n'existe pas de $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{u}$.
   En déduire que $(\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est une famille libre d'éléments de $\mathrm{Ker}(f^2 + Id_E)$.
   (b) Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + Id_E))$.
   (c) Soit $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Ker}(f)$ avec $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0_E}$.
   Montrer que la famille $(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est une base de E.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{1-x} dx$.

1. (a) Calculer u_0.
   (b) Calculer u_1.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$\frac{1}{n+1} \leqslant u_n \leqslant \frac{e}{n+1}$$
   En déduire la limite de la suite (u_n).
2. (a) Montrer que pour $n \geqslant 1$, on a $u_n = nu_{n-1} - 1$.
   (b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 0$, on a :
   $$u_n = n!\left(e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$$
3. Soit a un nombre réel.
   Soit (v_n) la suite définie par :
   $$\begin{cases} v_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \ v_n = nv_{n-1} - 1 \end{cases}$$
   Montrer que si $a \neq u_0$, la suite (v_n) diverge.
   Indication : on pourra considérer la suite $(v_n - u_n)$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{u_{n+2}}{(n+1)(n+2)}$$
   (b) En déduire la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} nu_n$, puis un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.
   (c) Montrer enfin que $u_n - \dfrac{1}{n} \underset{n \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exercice 4

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\ln(1+t^2)}$.

1. Justifier l'existence de F sur $\mathbb{R}^*$ et étudier sa parité.
2. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}^{+*}$ l'inégalité $\dfrac{(1+x^2)^2}{1+4x^2} \geqslant 1$.
   (b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et étudier ses variations.
3. (a) Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^+,\ \ln(1+u) \leqslant u$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ F(x) \geqslant \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t^2}$.
   (c) En déduire $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ puis $\lim\limits_{x\to 0^-} F(x)$.
4. (a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \dfrac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\ln(1+x^2)}$.
   (b) Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$, ainsi que la nature de la branche infinie de $\mathcal{C}_F$ en $+\infty$.

Exercice 5

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} e^{-xt}\cos(t)dt$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$.
3. Montrer que f est une décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (*Attention : on ne sait pas si f est dérivable*)
4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   Qu'en déduire pour le comportement de f en $+\infty$?
5. En encadrant $f(x)$ lorsque $x \in]0, +\infty[$, déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
6. Montrer que $\forall x < 0$, on a $f(x) \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}\displaystyle\int_0^{\pi/4} e^{-xt}dt$.
   Qu'en déduire pour le comportement de f en $-\infty$?
7. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}^+$, on a $|e^{-b} - e^{-a}| \leqslant |b-a|$
8. En déduire que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, $|f(b) - f(a)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{8}|b-a|$.
   Montrer alors que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 6

On définit une suite (f_n) de fonctions sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right], f_0(x) = 0$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad \forall\, x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right],\ f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x (1 + f_n^2(t))dt.$

1. On fixe un réel $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
   (a) Calculer $f_1(x)$ et $f_2(x)$.
   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$.
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant \tan(x)$.
   (d) En déduire que la suite de réels $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
   On note $f(x)$ sa limite.

   On a ainsi défini une fonction f sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$.
2. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est une fonction polynomiale dont le degré est $2^n - 1$.
   (b) Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, le terme de plus bas degré de f_n.
   (c) Calculer $f_n'(0)$ et $f_n''(0)$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a :
$$0 \leqslant f_n'(x) \leqslant 2$$
   En déduire que pour tous x et y de $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, on a :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant 2|x-y|$$
   puis que f est continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$