Exercice 1 : VRAI/FAUX

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elles sont Vraies ou Fausses. Aucune justication n'est demandée.
Pour la proposition numéro "k", vous pouvez simplement indiquer sur votre copie "$k.V$" ou "$k.F$".

1. Une suite minorée est convergente.
2. Une suite croissante et majorée par ℓ converge vers ℓ.
3. Une suite convergente est bornée.
4. Toute suite majorée est croissante.
5. Toute suite croissante admet une limite.
6. Toute suite non majorée tend vers $+\infty$
7. Si (u_n) converge, alors (u_n^2) également.
8. Si (u_n^2) converge, alors (u_n) également.
9. Si $\lim(u_{n+1} - u_n) = 0$, alors (u_n) est convergente.
10. Si : $\big(\forall A > 0, \exists N \in \mathbb{N} \;/\; u_N > A\big)$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
11. Si (u_n) est croissante et si $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{n}$, alors (u_n) converge.
12. Une suite qui tend vers $-\infty$ est décroissante à partir d'un certain rang.
13. Si (u_n) converge et si $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$, alors $1 < (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) < 2$.
14. Si $\forall n \in \mathbb{N}, 1 < u_n < 2$, alors $1 \leqslant (\lim\limits_{n\to+\infty} u_n) \leqslant 2$.
15. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.
16. Si $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$, alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$
17. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors $\exp(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \exp(v_n)$
18. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$, alors $u_n \times a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \times b_n$
19. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors on a $\ln(2u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(u_n)$
20. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, alors u_n et v_n ont le même signe à partir d'un certain rang.

Exercice 2

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{(4k-1)(4k+3)}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{4n-1}$.

1. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe un réel ℓ tel que : $\forall n \geqslant 1,\; u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.
3. Montrer alors que pour tout $n \geqslant 1$, on a : $|\ell - u_n| \leqslant \dfrac{1}{4n-1}$.

Exercice 3

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n}{2(1+u_n)}$.

1. Montrer que la suite (u_n) est bien définie et strictement positive.
2. Si la suite (u_n) converge vers un réel ℓ, que peut-on dire de ℓ ?
3. Vérifier qu'on a : $\forall n \in \mathbb{N},\; u_{n+1} - 1 = \dfrac{1 - u_n}{2(1+u_n)}$.
4. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\; |u_{n+1} - 1| \leqslant \dfrac{|u_n - 1|}{2}$.
5. Conclure alors que la suite (u_n) converge et donner sa limite.

Exercice 4

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_n^2}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$.
2. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par : $\forall n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2 + k}$.

1. Justifier que $\forall n \geqslant 1, \forall k \in [\![1, n]\!],\; \dfrac{1}{n^2+n} \leqslant \dfrac{1}{n^2+k} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n).
3. Montrer plus précisément que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.