Le devoir comporte six exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

On note $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y-z, 2x+y-z, 4x+2y-2z) \end{array}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.
3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
4. Soit $\overrightarrow{u} = (1,1,1)$. Décomposer $\overrightarrow{u}$ dans $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f^2)$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$.
2. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$ et soit f un endomorphisme de E.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ fixé. On pose : $F = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}\}$.
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) Montrer que si $\lambda \neq 0$, on a alors $F \subset \mathrm{Im}(f)$.
   (c) Si $\overrightarrow{u} \in F$, calculer $f \circ f(\overrightarrow{u})$, puis plus généralement calculer $f^k(\overrightarrow{u})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer que : $F = \{\overrightarrow{0}\} \Longleftrightarrow (f - \lambda Id_E)$ bijective.
   (e) Montrer que l'ensemble F est stable par f, c'est-à-dire montrer que pour tout $\overrightarrow{u}$ appartenant à F, le vecteur $f(\overrightarrow{u})$ appartient encore à F.
   (f) Soit g un endomorphisme de E tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que l'ensemble F est également stable par g, c'est-à-dire montrer que pour tout $\overrightarrow{u}$ appartenant à F, le vecteur $g(\overrightarrow{u})$ appartient encore à F.
2. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, avec $\alpha \neq \beta$. On pose :
   $$A = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \alpha\overrightarrow{u}\} \quad \text{et} \quad B = \{\overrightarrow{u} \in E \ / \ f(\overrightarrow{u}) = \beta\overrightarrow{u}\}$$
   (a) Montrer que $A \cap B = \{\overrightarrow{0}\}$.
   (b) On suppose qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{u} \in A$ et $\overrightarrow{v} \in B$, tels que $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
   Montrer que la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est libre.

Exercice 4

Soit λ un réel quelconque. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de λ pour que la matrice A soit inversible.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par :

$$\forall x \in]0,1[\cup]1,+\infty[,\ f(x) = \frac{x+1}{x-1} \times \frac{\ln(x)}{2}$$

1. Montrer qu'on peut prolonger f en une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que : $\forall x > 0,\ \ln(x) \leqslant x-1$.
   En déduire que pour tout $x > 1$, on a $f(x) < x$.
3. Calculer la dérivée f' de f sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Étudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
4. Vérifier que pour tout $x > 0$ tel que $x \neq 1$, on a :
   $$f'(x) = \frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$
   En déduire que la fonction (prolongée) f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.
   Indication : *on pourra utiliser sans le démontrer l'équivalent suivant :* $\ln(1+u) - u \underset{u\to 0}{\sim} -\dfrac{u^2}{2}$
5. Justifier qu'il existe $\alpha > 1$ tel que : $\forall x \in]1-\alpha,1+\alpha[,\ |f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$.
6. Montrer que pour tout $x \in]1-\alpha,1+\alpha[$, on a :
   $$|f(x)-1| \leqslant \frac{1}{3}|x-1|$$

Exercice 6

L'objectif de cet exercice est de résoudre dans $\mathbb{R}^+$ l'équation :

$$(*)\ : \mathrm{Arctan}(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\mathrm{Arccos}(x)}$$

Pour tout x de $[0,1[$, on pose :

$$f(x) = \frac{\mathrm{Arcsin}(x)}{\mathrm{Arccos}(x)} - \mathrm{Arctan}(x)$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1[$.
2. (a) Démontrer que $\forall x \in [-1,1],\ \mathrm{Arcsin}(x) + \mathrm{Arccos}(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
   (b) Calculer f' et f''.
   (c) Quel est le signe de f''.
   Que peut-on en déduire pour la fonction f ?
   (d) Justifier qu'il existe un unique $\beta \in [0,1[$ tel que $f'(\beta) = 0$. Préciser alors le signe de $f'(x)$ selon les positions relatives de x et β.
   (e) Dresser le tableau de variation de f et en déduire l'existence d'un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
   On admettra que $\alpha \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right]$.
3. Pour tout $x \in [0,1[$, on pose :
   $$g(x) = \sin\big(\mathrm{Arccos}(x)\mathrm{Arctan}(x)\big)$$
   (a) Justifier que pour tout $x \in [0,1[$, on a :
   $$0 \leqslant \mathrm{Arccos}(x)\mathrm{Arctan}(x) \leqslant \frac{\pi}{2}$$
   (b) Pour quelles valeurs de $\theta \in \mathbb{R}$ a-t-on $\mathrm{Arcsin}(\sin(\theta)) = \theta$?
   (c) Justifier que pour $x \in [0,1[$,
   $$f(x) = 0 \Longleftrightarrow g(x) = x$$
   (d) Déterminer la fonction h telle que :
   $$\forall x \in [0,1[,\ g'(x) = h(x)\ \cos\big(\mathrm{Arccos}(x)\mathrm{Arctan}(x)\big)$$
   (e) Démontrer que h est décroissante sur $[0,1[$.
   On donne $h(1/2) \simeq 0.3$. Que peut-on en déduire pour la fonction g sur l'intervalle $[0,1/2]$?
   (f) Justifier que $\forall x \in [1/3,1/2]$, on a $|g'(x)| \leqslant h\left(\dfrac{1}{3}\right)$.
   (g) Démontrer alors que :
   $$\forall x \in \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \quad |g(x)-\alpha| \leqslant h\left(\frac{1}{3}\right)|x-\alpha|$$