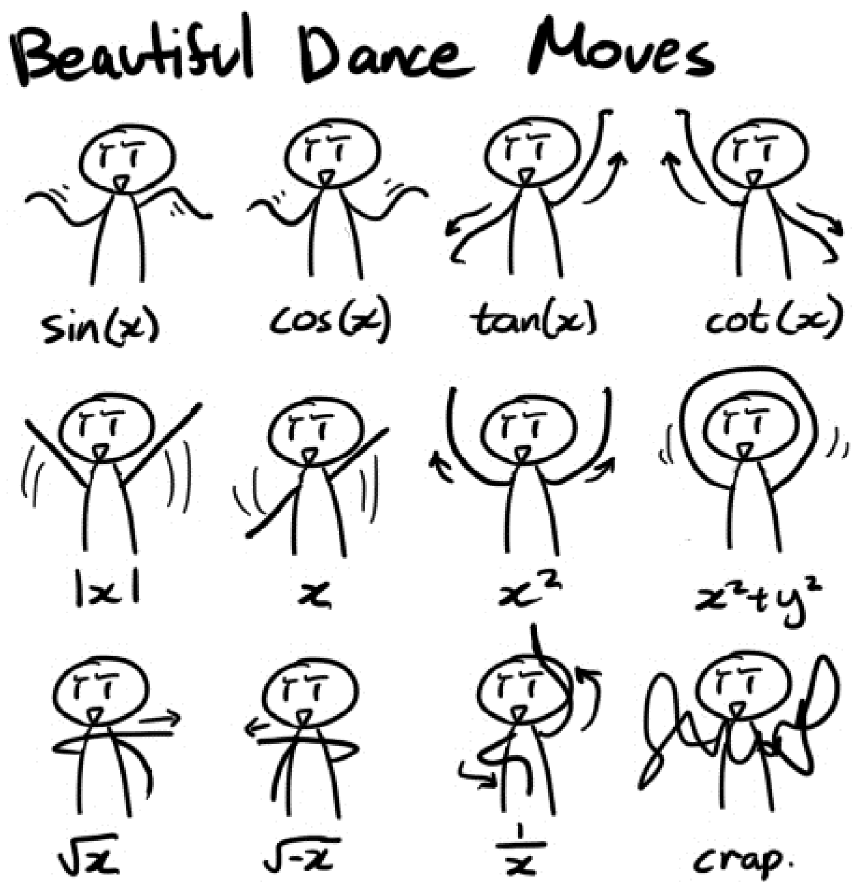
# Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

## Épreuve de mathématiques

*Vendredi 14 Décembre 2012 - 08h-12h*

L'épreuve comporte cinq exercices indépendants qui peuvent être abordés dans un ordre au choix du candidat. Le sujet est rédigé sur 4 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

---




*La musique est une mathématique sonore,*
*La mathématique une musique silencieuse.*
Edouard Herriot.

# Exercice 1

Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles et soient $f : E \to F$, $g : F \to G$, $h : G \to E$, trois applications telles que :

$$h \circ g \circ f : E \to E \text{ injective}, \qquad g \circ f \circ h : G \to G \text{ surjective}, \qquad f \circ h \circ g : F \to F \text{ surjective}.$$

1. Montrer que $f$ est bijective (i.e. injective et surjective).
2. Montrer que $g$ est bijective (i.e. injective et surjective).
3. Montrer que $h$ est bijective (i.e. injective et surjective).

# Exercice 2

Pour tout réel $x$, on note :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. (a) Étudier les variations de la fonction $f$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
   (b) Proposer des exemples d'ensembles de départ et d'arrivée pour que l'application $f$ soit injective, pour que l'application $f$ soit surjective, pour que l'application $f$ soit bijective.
2. (a) Étudier les variations de la fonction $g$ sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations.
   (b) Justifier que l'équation $g(x) = 1$ admet exactement une solution dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer un équivalent de $g(x)$ lorsque $x \to 0$.
4. Montrer que
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) - 1 = 2(g(x))^2.$$
   En déduire que $f(x) - 1 \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
5. On considère à présent la suite $(u_n)$ définie par :
$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{u_n}{f(u_n)}$$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n > 0$.
   (b) Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement décroissante.
6. On considère la suite $(v_n)$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1.$$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ -1 < v_n < 0$.
   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que :
$$\sum_{k=0}^{n} \ln(1 + v_k) = \ln(u_{n+1}).$$

# Exercice 3

1. (a) Démontrer que pour tous réels $a$ et $b$, on a :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b), \qquad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

   (b) En déduire que pour tous réels $a$ et $b$ tels que $\cos(a) \neq 0$, $\cos(b) \neq 0$ et $\cos(a+b) \neq 0$, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.$$

2. On pose :

$$f(x) = \operatorname{Arctan}(x-1) + \operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}(x+1).$$

   (a) Préciser le domaine de définition de $f$. La fonction $f$ est-elle paire ? impaire ?

   (b) Étudier les variations de $f$ et dresser le tableau de variations de $f$ (limites comprises).

   (c) Préciser l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0.

   (d) Justifier que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle $J$ à déterminer.

   (e) À l'aide de la question 1.(b), calculer $\tan(f(2))$ et en déduire que $f(2) = \pi$.

   (f) Justifier que l'application réciproque $f^{-1}$ de $f$ est dérivable en $\pi$ et préciser $(f^{-1})'(\pi)$.

# Exercice 4

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2, on s'intéresse aux polynômes :

$$Q_n = (X+1)^n - X^n - 1.$$

1. (a) À l'aide de la formule du Binôme de Newton, donner l'expression de $Q_n$ sous forme de somme.

   (b) Déterminer le degré de $Q_n$ ainsi que son monôme de plus haut degré.

2. Montrer que $X$ divise $Q_n$.

3. (a) Déterminer les valeurs de $n$ pour lesquelles $Q_n$ est divisible par $X+1$.

   (b) Le polynôme $Q_n$ peut-il être divisible par $(X+1)^2$ ?

4. On pose $j = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{3}\right)$.

   (a) Rappeler la valeur de $1+j+j^2$. Développer $(X-j)(X-j^2)$.

   (b) Montrer que si $n$ s'écrit $6k-1$ ou $6k+1$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors $Q_n(j) = 0$.

   (c) Montrer que si $n$ s'écrit $6k+1$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$), alors $j$ est racine double de $Q_n$.

   (d) Déduire des questions précédentes une factorisation de $Q_5$ et $Q_7$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis $\mathbb{R}[X]$.

# Exercice 5

On définit la fonction $f$ par :

$$\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \; f(x) = (\cos(x))^{1/x}.$$

1. Montrer que $f$ est bien définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et que $f$ est continue et dérivable sur cet intervalle.
2. (a) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en 0. Donner la valeur de $f(0)$ obtenue.

   (b) Montrer que $f$ est prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$. Donner la valeur de $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ obtenue.
3. (a) Montrer que $f$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $f'(0)$.

   (b) Calculer la dérivée de $f$ sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, et montrer que $f'$ est continue en 0.
4. (a) Montrer que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a :

   $$\frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}} = \frac{(\cos(x))^{\frac{2}{\pi}}}{x - \frac{\pi}{2}} \exp\left(\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos(x))\right).$$

   (b) Montrer que $\cos(x) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\sim} \frac{\pi}{2} - x$, puis que $\ln(\cos(x)) \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\sim} \ln\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
   En déduire que :

   $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^{\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{\pi}\right)\ln(\cos(x))} = 1.$$

   (c) Montrer que $(\cos(x))^{2/\pi} \underset{x \to \frac{\pi}{2}^-}{\sim} \left(\frac{\pi}{2} - x\right)^{2/\pi}$. En déduire la valeur de : $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x)}{x - \frac{\pi}{2}}$.

   (d) La fonction $f$ est-elle dérivable en $\frac{\pi}{2}$ ? Comment interpréter graphiquement le résultat précédent ?