Le devoir comporte 4 exercices et 2 problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

1. Déterminer un équivalent simple de $x^{1/x} - 1$ au voisinage de $+\infty$.
2. En déduire un équivalent simple de $x^{(x^{1/x})} - x$ au voisinage de $+\infty$.
   (on pourra commencer par factoriser l'expression par x)

Exercice 2

1. Montrer que pour tout réel θ, on a :

$$\cos(\theta) + \cos(3\theta) = 2\cos(2\theta)\cos(\theta).$$

2. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation :

$$\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0.$$

Exercice 3

On pose : $f(x) = \left(\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f, noté D_f.
2. Déterminer la limite de f au voisinage de $-\infty$. Préciser la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.
3. Justifier que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction g que l'on précisera.

Exercice 4

On pose : $f(x) = (x-1)\exp\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. noté D_f.
2. Justifier que f est dérivable sur D_f.
   Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in D_f$.
3. Déterminer les limites de f en 1^+ et 1^-.
   Peut-on prolonger f par continuité à droite en 1 ?
   Peut-on prolonger f par continuité à gauche en 1 ?
4. Déterminer la limite de f au voisinage de $+\infty$. Préciser la branche infinie de la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

Problème 1

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit un autre polynôme noté $F(P)$ de $\mathbb{R}[X]$ défini par :

$$F(P) = 9X \cdot P(X) - (X^2 - 1) \cdot P'(X)$$

1. On pose $A(X) = 2X^2 + 4X + 2$ et $B(X) = \frac{1}{9} - X^4$.
   (a) Factoriser A et B dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Calculer $F(A)$ et $F(B)$ puis les factoriser dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit P un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer que le degré de $F(P)$ est inférieur ou égal à $n + 1$.
   (b) Pour $n \neq 9$, montrer que $F(P)$ est un polynôme non nul de degré $n + 1$.

Le but de la fin du problème est de déterminer les éventuels polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ satisfaisant l'équation suivante :

$$(*) : \qquad F(P) = 9\, P.$$

3. Montrer que le polynôme nul est une solution de l'équation $(*)$.
4. On cherche à savoir s'il est possible d'avoir des polynômes non nuls satisfaisant l'équation $(*)$.
   Supposons donc qu'il existe Q un polynôme non nul satisfaisant l'équation $(*)$, i.e. vérifiant $F(Q) = 9\, Q(X)$.
   (a) Déterminer le degré de Q.
   (b) Montrer que -1 est une racine de Q.
   (c) Comme -1 est racine de Q, on peut donc écrire Q sous la forme :
   $$Q(X) = (X + 1)^k R(X)$$
   où $k \in \mathbb{N}^*$ et R est un polynôme à coefficients réels n'admettant pas -1 comme racine.
   Montrer que $k = 9$ et que R est un polynôme constant.
   (d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(*)$.

Problème 2

On rappelle le résultat suivant :
Si f est dérivable en x_0, on a : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$.

1. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant \dfrac{2t}{1 + t^2} \leqslant 1$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t = \dfrac{2t}{1 + t^2}$.

On suppose à présent que f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 + f(x)f(y)}. \qquad (**)$$

3. En posant $x = y = \dfrac{u}{2}$, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
4. Trouver toutes les fonctions constantes vérifiant $(**)$.

On suppose pour toute la suite du problème que f n'est pas une fonction constante.

5. En raisonnant par l'absurde, montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 < f(x) < 1.$$
6. En déduire que $f(0) = 0$, puis que f est une fonction impaire.
7. Montrer que pour x et h réels, on a :
$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \frac{f(h)}{h}\left(1 - (f(x))^2\right) \times \frac{1}{1 + f(x)f(h)}.$$
8. En déduire que :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f'(0)(1 - (f(x))^2).$$
9. Montrer que $f'(0) \neq 0$.
10. Justifier que la fonction f est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
11. Justifier que f admet une limite finie ℓ au voisinage de $+\infty$.
    En utilisant l'égalité $(**)$, montrer que $\ell = 1$ ou $\ell = -1$.