Le devoir comporte trois exercices et deux problèmes indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 2 pages. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

On note :

$$P(X) = 2X^4 - 3X^3 + 5X^2 + 11X - 15$$

1. Vérifier que $1 + 2i$ est une racine de P.
2. Déterminer les factorisations de P en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}[X]$ et sur $\mathbb{C}[X]$ (dans l'ordre de votre choix).

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -1$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{n+3}{n+2}u_{n+1} - \frac{1}{n+2}u_n$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 5 - 3\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Exercice 3

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.
L'immeuble de la Hong Kong Business Ltd. (HKBL) est une tour de n étages, heureusement pourvue d'un ascenseur et de son liftier.

Au rez-de chaussée, p personnes entrent dans la cabine et pressent (sur la platine de commande des étages) le bouton de l'étage où elles veulent se rendre (ce qui allume le bouton, bien sûr).

Le rez-de chaussée n'est pas considéré comme un étage. De plus, les p personnes sont supposées discernables, mais lorsque plusieurs d'entre elles sortent à un même étage, leur ordre de sortie n'est pas pris en compte.

1. Justifier qu'au moment du départ, il y a exactement N illuminations différentes de la platine de commande, où N est donné par :

   $$N = \sum_{k=1}^{p} \binom{n}{k}$$

   Donner la valeur de N lorsque $p = n$.
2. Au moment du départ, le liftier constate que, parmi les boutons des étages, p sont allumés. De combien de façons différentes les p personnes peuvent-elles descendre ?
3. Même question si le liftier constate au départ que $p - 1$ boutons sont allumés.
4. Le président directeur général de la HKBL a fait réquisitionner $n-1$ ampoules de la platine de commande de l'ascenseur pour la guirlande de son sapin de Noël personnel. Du coup, seul le bouton de l'étage 1 peut encore s'illuminer.
   Le liftier constate que le bouton de l'étage 1 est allumé au départ. De combien de façons différentes les p personnes peuvent-elles descendre ?

Problème 1

On définit une suite de polynômes $(P_0, P_1, P_2, \dots)$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ \forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X) \end{cases}$$

1. (a) Calculer P_2, P_3 et P_4.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est de degré n.
   (c) Pour tout $n \geqslant 1$, on note a_n le coefficient dominant de P_n. Montrer que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison 2 et en déduire l'expression de a_n pour tout $n \geqslant 1$.
2. (a) Montrer que pour tous réels a et b, on a :
   $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
   (b) Montrer que pour tout réel a, on a :
   $$\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1 \qquad \text{et} \qquad \sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$$
3. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. A l'aide d'une récurrence double, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé.
   On suppose qu'il existe un polynôme $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :
   $$\forall \theta \in \mathbb{R},\ \cos(n\theta) = Q_n(\cos\theta)$$
   On pose $R_n = P_n - Q_n$.
   (a) Calculer $R_n(\cos(\theta))$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$
   (b) En déduire que $Q_n = P_n$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé.
   (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :
   $$\cos(x) = 0$$
   (b) Montrer que :
   $$\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(3\frac{\pi}{2n}\right), \cos\left(5\frac{\pi}{2n}\right), \dots, \cos\left((2n-1)\frac{\pi}{2n}\right)$$
   sont des racines de P_n, toutes distinctes.
   (c) En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$.

Problème 2

On rappelle que $\mathbb{U}_5$ désigne l'ensemble des racines 5-ièmes de l'unité, c'est-à-dire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^5 = 1$.

1. (a) Rappeler quels sont les éléments de $\mathbb{U}_5$ écrits sous forme exponentielle. On notera les éléments de $\mathbb{U}_5$: $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_4$
   (b) Donner la valeur de $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{4} \omega_k$ et de $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{4} \omega_k$
2. (a) Montrer que le produit et le quotient de deux éléments de $\mathbb{U}_5$ sont encore des éléments de $\mathbb{U}_5$.
   (b) Montrer qu'on a : $\mathbb{U}_5 = \left\{\omega_0^3, \omega_1^3, \dots, \omega_4^3\right\}$.
   (c) Soit $\beta \in \mathbb{U}_5$ un élément fixé.
   Montrer que : $\mathbb{U}_5 = \left\{\dfrac{\omega_0}{\beta}, \dfrac{\omega_1}{\beta}, \dots, \dfrac{\omega_4}{\beta}\right\}$.
   (d) En notant $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{3}\right)$, justifier qu'on a :
   $$X^5 - j^2 = \prod_{k=0}^{4}(X - j\omega_k) \qquad \text{et} \qquad X^5 - j = \prod_{k=0}^{4}(X - j^2\omega_k)$$
3. Pour chaque élément ω_k appartenant à $\mathbb{U}_5$, on crée un polynôme $P_k(X) = X^2 + \omega_k X + \omega_k^2$. On obtient ainsi 5 trinômes. On désigne par $B(X)$ leur produit, c'est-à-dire :
   $$B(X) = \prod_{k=0}^{4} P_k(X) = \prod_{k=0}^{4}(X^2 + \omega_k X + \omega_k^2)$$
   (a) Quel est le degré du polynôme $B(X)$? Quel est son coefficient dominant ? Calculer $B(0)$.
   (b) A l'aide de la question 2.(c) et sachant que :
   $$\beta^2 X^2 + \alpha\beta X + \alpha^2 = \beta^2\left(X^2 + \frac{\alpha}{\beta}X + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$$
   comparer $B(X)$ et $B(\beta X)$ pour tout $\beta \in \mathbb{U}_5$.
   (c) Calculer les racines de B. En déduire l'écriture de $B(X)$ sous forme développée à l'aide de la question 2.(d)