Le devoir comporte quatre exercices indépendants, qui peuvent être abordés dans un ordre laissé au choix du candidat.

Le sujet est rédigé sur 1 seule page. L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.

Bien traiter quelques questions rapporte des points, les bâcler toutes n'en rapporte aucun. Il sera tenu compte de la rigueur, du soin et de la rédaction dans la notation. Seuls les résultats soulignés ou encadrés seront considérés comme des résultats.

Exercice 1

Soit q un réel. On considère pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} kq^k$.

1. Lorsque $q = 1$, donner la valeur de S_n pour tout $n \geqslant 1$.
2. Montrer par récurrence que lorsque $q = 2$, on a :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = 2 + (n-1)2^{n+1}$$

3. On suppose à présent que q est un réel quelconque vérifiant $q \neq 1$. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geqslant 1,\ S_n = \frac{q - (n+1)q^{n+1} + nq^{n+2}}{(1-q)^2}$$

Exercice 2

On note pour tout $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $u_n = S_{2n+1}$.

1. Étudier le sens de variation de la suite (u_n).
2. La suite (u_n) est-elle minorée ?

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2, \quad u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}u_n}{3u_n - u_{n+1}} \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. On considère la suite (v_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
   Montrer que (v_n) est une suite d'un type connu à préciser.
   En déduire pour tout entier n l'expresion de v_n en fonction de n.
3. En calculant, pour tout entier n, de deux manières différentes la somme $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$, déterminer l'expresion de u_n en fonction de n.
   Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{3 \times 2^{n-1} - 1}$.

Exercice 4

On rappelle que pour tout entier naturel $p \geqslant 1$, la notation $p!$ signifie :

$$p! \quad = \quad \prod_{k=1}^{p} k \quad = \quad p \times (p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $(k+1)!$ en fonction de $k!$.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul k, on a $k! \geqslant 2^{k-1}$.
3. En déduire que pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2$$

$* * *$ *Fin du sujet* $* * *$