Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -9 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A

1. Déterminer les valeurs propres de f, i.e. tous les réels λ tels que $(f - \lambda Id)$ soit non bijective.
   (Réponse : -2, 1 et 3)
2. Pour chaque valeur propre trouvée, déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f - \lambda Id)$.
3. Déterminer une base $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est diagonale.
4. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice diagonale D telle que $A = PDP^{-1}$. Calculer P^{-1}.
5. En déduire la valeur de A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et soit f un endomorphisme de E vérifiant :

$$f^2 + 5f + 6Id_E = 0$$

1. Montrer que f est bijectif et déterminer f^{-1} en fonction de f et Id_E.
2. Montrer qu'on a :

$$E = \mathrm{Ker}(f + 2Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + 3Id_E)$$

3. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.