Exercice 1

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$\forall P \in \mathbb{R}_3[X],\ f(P) = (X-1)P'(X) + (X-1)^2 P''(X)$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_3[X]$.
3. En déduire le rang de f, $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Ker}(f)$.
   L'application f est-elle bijective ?
4. Soit $\mathcal{B}' = (1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3)$. Vérifier que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
5. Déterminer la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2

1. Calculer le rang des matrices suivantes :

   (a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

   (d) $D = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix}$

2. Déterminer le noyau de A et B.