Exercice 1

Pour $n \geqslant 1$, on pose $u_n = \displaystyle\int_1^e x^2(\ln(x))^n dx$.

1. Montrer que $\forall n \geqslant 1, u_n \geqslant 0$.
2. Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$. En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Montrer que : $\forall x \in [1, e],\ \ln(x) \leqslant \dfrac{x}{e}$.
   En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_{n+1} = \dfrac{e^3}{3} - \dfrac{n+1}{3}u_n$.
5. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$, puis déterminer un équivalent de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 2

On considère la fonction F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{4+t^4}}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de F ?
2. Montrer que F est une fonction impaire.
3. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $F'(x)$.
4. Montrer que : $\forall x \geqslant 0,\ \dfrac{x}{\sqrt{4+16x^4}} \leqslant F(x) \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{4+x^4}}$.
   En déduire la limite de F en $+\infty$.
5. Dresser le tableau de variations de F.
6. On pose pour $x > 0$, $H(x) = x\displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1}{\sqrt{4+t^4}} - \frac{1}{t^2}\right) dt$.
   Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} H(x) = 0$.
   En déduire un équivalent de F en $+\infty$.