Exercice 1

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \qquad \text{où } f(x) = \frac{2}{3}(1 - x^2)$$

1. Etudier rapidement les variations de f.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$ (on notera α et β avec $\alpha < \beta$ les solutions de cette équation).
3. Tracer dans un repère le graphe de f sur $[0, 1]$ et placer sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite. La suite (u_n) parait-elle convergente ?
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
5. On considère $g = f \circ f$. Montrer que g est croissante sur $[0, 1]$.
6. En résolvant l'équation $g(x) = x$, montrer que β est le seul point fixe de g sur $[0, 1]$ (on pourra factoriser le polynôme $f(x) - x$ en remarquant que α et β en sont des racines)
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.
   Montrer que (v_n) est croissante et (w_n) décroissante.
8. En déduire que (v_n) et (w_n) convergent et préciser les valeurs de leurs limites. Que dire de (u_n) ?

Exercice 2

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite :

$$u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{1/\tan(e^{-n})}$$