Exercice 1

Dans chaque cas, déterminer u_n en fonction de n :

1. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \dfrac{2}{3}u_{n+1} - \dfrac{2}{9}u_n \end{cases}$
2. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5,\ u_1 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \end{cases}$
3. (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 4,\ u_1 = 1/2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}^5\ u_n^3} \end{cases}$

Exercice 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. On pose pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \sqrt{x+2}$.
   Montrer que la fonction f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}^+$ et le déterminer.
4. Montrer que $\forall x \in [0,2],\ |f(x) - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|x - 2|$.
5. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - 2| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - 2|$,
   puis que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 2| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - 2|$$
6. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.