Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $]0, e^{-1}[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x) + 1}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Montrer que la fonction f prolongée est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, e^{-1}[$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, e^{-1}[$?

Exercice 2

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $]0, +\infty[$, et que $\alpha \in]1, 2[$.
2. A l'aide de l'Inégalité des Accroissements Finis, montrer que :
$$\forall x \in [1, +\infty[,\ |f(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|x - \alpha|$$