Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
Soient f et g deux endomorphismes de E qui vérifient :

$$f \circ g = 0 \qquad \text{et} \qquad f + g \quad \text{bijectif}$$

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Montrer que $\mathrm{Im}(f+g) \subset \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g)$.
3. Déduire des deux questions précédentes qu'on a :

$$\mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g) = n$$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Soit g un endomorphisme de E tel que :

$$g \circ g = g$$

   (a) Si E est de dimension finie, justifier que :

$$E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$$

   (b) Si E est quelconque, montrer qu'on a également :

$$E = \mathrm{Ker}(g) \oplus \mathrm{Im}(g)$$

2. Soit f un endomorphisme de E tel que :

$$f \circ f = Id_E$$

   Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id_E)$.

Pour les questions 1(b) et 2, on raisonnera par conditions nécessaires et suffisantes.