

Exercice

Pour chacune des applications suivantes :

1. montrer qu'elle est linéaire
2. déterminer son noyau (on en donnera une base et la dimension)
3. déterminer son image (on en donnera une base et la dimension)
4. vérifier le Théorème du Rang
5. déterminer l'injectivité et/ou la surjectivité de l'application

(On pourra déterminer les points 2 à 5 dans un ordre indifférent)

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, x - y + z) \end{array}$$

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x + y, x - y + z, y - 2z) \end{array}$$

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (X - 2)P''(X) \end{array}$$

$$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP(X) \end{array}$$

$$v: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}$$

$$w: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a, b, c) & \longmapsto & aX^2 + bX + c \end{array}$$