

Exercice 1

Soient les ensembles suivants :

$$F = Vect((1, 0, -1), (0, -1, 1), (-1, 1, 0))$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x - y - z = 0\}$$

$$H = \{(a, a, a), a \in \mathbb{R}\}$$

$$J = Vect((0, 2, 2), (0, -1, -1))$$

1. Montrer que F , G , H et J sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 et déterminer pour chacun de ces espaces une base et la dimension.
2. Déterminer le sous-espace vectoriel $F \cap G$ (en donner une base et la dimension).
3. Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?
 F et H ? F et J ? G et H ? G et J ? H et J ?

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.

$$\text{On note } F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E et déterminer une base de F .
2. Soit $G = Vect(I_2)$. Montrer que $E = F \oplus G$.
3. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \in E$.
Décomposer M dans la somme directe $E = F \oplus G$.