Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On pose $B = A + I_3$ et $C = A - 3I_3$.

1. Calculer BC et CB.
2. Calculer B^2 et C^2. En déduire B^k et C^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer deux réels λ et μ tels que $A = \lambda B + \mu C$. En déduire pour tout $n \geqslant 1$ l'expression de A^n en fonction de B et C, puis en fonction de n.
4. Vérifier ces formules pour $n = 0$.
5. Montrer que A est inversible et que les formules ci-dessus sont valables pour $n = -1$, puis pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2

On considère les trois matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Vérifier que $M = PDP^{-1}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = PD^nP^{-1}$.
5. En déduire explicitement M^n pour $n \in \mathbb{N}$.