Exercice 1

Soit E un ensemble.

1. Soit f une application de E dans E qui vérifie :

$$f \circ f = f$$

   (a) Montrer que si f est injective, alors $\forall x \in E$, $f(x) = x$.

   (b) Montrer que si f est surjective, alors $\forall x \in E$, $f(x) = x$.

2. Soit g une application telle que :

$$g \circ g \circ g = g$$

   (a) Montrer que si g est injective, alors g est surjective.

   (b) Montrer que si g est surjective, alors g est injective.

Exercice 2

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation :

$$\ln(x) = \frac{1}{x^n}$$

   admet une unique solution dans $\mathbb{R}^{+*}$, que l'on note u_n.

2. Montrer que la suite (u_n) est minorée par 1.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.