Problème

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{e^x - 1}{x} > 0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \ln\left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 & \end{cases}$$

2. Justifier que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
   Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
3. Montrer que f est continue en 0.
4. On admet la formule suivante : $e^x - 1 - x \underset{x \to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$.
   Montrer que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{1}{2}$.
   Que peut-on en déduire pour f en 0 ?
5. (a) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
   (b) Vérifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x + f(-x)$$
   En déduire la nature de la branche infinie de f en $+\infty$.
6. Étudier les variations de la fonction g définie par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = xe^x - e^x + 1$$
   En déduire le signe de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de la fonction f.
7. Soit (u_n) la suite définie par :
   $$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $]0, +\infty[$. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.