## Exercice 1

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{3^{k-1}}{2^{k+1}}$.

1. Calculer $u_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.
2. (a) Soit $(v_n)_{n \geqslant 1}$ la suite définie par $\forall n \geqslant 1, v_n = \dfrac{2^n u_n}{3^n}$.
   Montrer que la suite $(v_n)$ est arithmético-géométrique.

   (b) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$ l'expression de $v_n$ en fonction de $n$. Retrouver alors l'expression de $u_n$ obtenue à la question 1.

## Exercice 2

Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ les suites définies par :

$$\begin{cases} a_0 = 2, b_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n$ et $b_n$ sont strictement positifs.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = a_n - b_n$ et $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$.

   (a) Vérifier que $(d_n)$ est une suite usuelle.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n = 2^{2^n}$.

   (c) Déduire de (a) et (b) l'expression de $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$, pour tout entier $n$.
3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier le produit $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\prod_{k=0}^{n} q_k = \frac{1}{2} q_{n+1}$.