Exercice 1

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\sqrt{u_n^2+1}} \end{cases}.$$

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.
2. Conjecturer une expression de u_n pour $n \geqslant 1$ quelconque.
3. Démontrer alors le résultat par récurrence.
4. La suite (u_n) est-elle croissante ? décroissante ?
5. La suite (u_n) est-elle majorée ? minorée ?

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 4^n \end{cases}.$$

1. Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+2} = \frac{13}{3}u_{n+1} - \frac{4}{3}u_n.$$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{8}{11}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{11}4^n.$$