Hypokhâgne B/L - Concours Blanc

Épreuve de mathématiques

Samedi 5 Mai 2012 - 08h-12h

Si la vie est complexe, c'est parce qu'elle a une partie réelle et une partie imaginaire.
Marius Sophus Lie.

Le devoir comporte six exercices qui peuvent être abordés <u>dans un ordre laissé au choix du candidat.</u>
Le sujet est rédigé sur 5 pages.
L'usage de toute calculatrice ou de tout moyen de communication est interdit.
<u>SUJET AVEC INDICATIONS</u> : à part dans l'exercice 6, les questions sont un peu plus détaillées que dans le sujet original afin de guider un peu plus les réponses.

Exercice 1

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$$

1. Calculer u_1.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante et majorée par 1. Qu'en déduit-on ?
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

   $$1 - u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx$$

   En déduire l'encadrement :

   $$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

   puis la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. En remarquant qu'on a, pour tout x de $[0,1]$, $\dfrac{x^n}{1+x^n} = x\dfrac{x^{n-1}}{1+x^n}$ et en effectuant une intégration par parties, établir l'égalité :

   $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}dx = \frac{\ln(2)}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)dx$$

5. Montrer que pour tout u réel positif, $\ln(1+u) \leqslant u$.
   En déduire que :

   $$\int_0^1 \ln(1+x^n)dx \leqslant \frac{1}{n+1}$$

6. Donner une valeur approchée de $1 - u_{10}$, puis de u_{10} à 10^{-2} près.

Exercice 2

Dans cet exercice, les changements de variables doivent être justifiés, c'est-à-dire les conditions pour qu'ils soient valables doivent être précisées.

1. À l'aide d'un changement de variable $u = x^2 = \varphi(x)$, calculer l'intégrale :

   $$I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

2. À l'aide d'un changement de variable $u = \mathrm{Arccos}(x) = \varphi(x)$ (qu'on justifiera), calculer l'intégrale :

   $$J = \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}dx$$

Exercice 3

1. Soit T une matrice triangulaire. Rappeler à quelle condition la matrice T est inversible.
2. Soit a un réel quelconque. Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la matrice $M = \begin{pmatrix} -a & -1 & -1 \\ -1 & -a & -1 \\ 1 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$ n'est pas inversible. On essaiera pour cela de déterminer une matrice triangulaire équivalente à M.

Exercice 4

On définit les polynômes A, B et C par :

$$A = (X+3)(X+5), \quad B = 2(X+1)(X+5), \quad C = 3(X+1)(X+3)$$

1. (a) Rappeler la dimension de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Montrer que les trois polynômes A, B et C forment une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$.
   (c) Pourquoi peut-on affirmer que (A, B, C) est une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
2. On considère $E = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P(-1) = 0\}$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ qui s'annulent en -1.
   Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
3. (a) Démontrer que $(X+1, X^2-1)$ est une famille libre d'éléments de E.
   (b) En déduire que $\dim(E) \geqslant 2$.
   (c) Justifier que $2 \leqslant \dim(E) \leqslant 3$. Est-il possible que $\dim(E) = 3$?
   En déduire une base et la dimension de E.
4. Démontrer que (B, C) est une base de E.
5. Soit F l'espace vectoriel engendré par le polynôme A, c'est-à-dire $F = Vect(A)$.
   Démontrer que $F \cap E = \{0\}$.
   A-t-on $\mathbb{R}_2[X] = F \oplus E$?

Exercice 5

Soit f la fonction définie, lorsque cela a un sens, par la relation suivante :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}$$

On notera pour tout $t \in]0, +\infty[$, $g(t) = \dfrac{1}{t - \ln(t)}$.

1. Montrer que $f(x)$ a un sens pour tout x strictement positif.
2. Justifier pourquoi g admet une primitive G sur $]0, +\infty[$ et exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G. En déduire que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et calculer sa dérivée $f'(x)$ pour $x > 0$.
3. Étudier les variations de la fonction f.
4. (a) Calculer, pour $x > 0$, $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t}$.

   (b) Déterminer un équivalent de : $t^{3/2}\left(\dfrac{1}{t - \ln(t)} - \dfrac{1}{t}\right)$ et en déduire que :

   $$\lim_{t \to +\infty} t^{3/2}\left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t}\right) = 0$$

   (c) Justifier qu'il existe un réel A tel que pour tout $t > A$, on ait :

   $$t^{3/2}\left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t}\right) \leqslant 1$$

   (d) Calculer $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ et déduire de la question précédente que

   $$\lim_{x \to +\infty} \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t - \ln(t)} - \frac{1}{t}\right) dt = 0$$

   (e) Montrer que f admet une limite quand x tend vers $+\infty$, et que cette limite est $\ln(2)$.
5. Montrer que f admet pour limite 0 quand x tend vers 0^+, et en déduire que f est prolongeable en une fonction continue sur $\mathbb{R}^+$.
6. Déterminer la limite de $f'(x)$ lorsque $x \to 0^+$. La fonction f (prolongée) est-elle dérivable en 0 ?
7. Donner l'allure de la représentation graphique de f, le plan étant rapporté à un repère orthonormé.

Exercice 6

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3, dont on notera le vecteur nul $\overrightarrow{0}$.
Soit u un endomorphisme de E qui vérifie :

$$\forall \overrightarrow{x} \in E,\ u^3(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$$

où u^3 désigne la composée $u \circ u \circ u$.

1. Peut-on avoir $\mathrm{Ker}(u) = \{\overrightarrow{0}\}$? Déterminer $\mathrm{Ker}(u^3)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(u^2)$ et $\mathrm{Ker}(u^2) \subset \mathrm{Ker}(u^3)$.
3. Montrer que si on a $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(u^2)$, alors $\mathrm{Ker}(u^2) = \mathrm{Ker}(u^3)$.
4. On suppose dans cette question que $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. On souhaite prouver que $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$.
   (a) Montrer que si $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 1$, alors on a $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. En déduire que ce cas est exclu.
   (b) Montrer que si $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 3$, alors $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. En déduire que ce cas est exclu.
   (c) Conclure.
5. Montrer que si $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$, alors u^2 est l'endomorphisme nul.
6. On suppose dans cette question que u^2 n'est pas l'endomorphisme nul.
   (a) Calculer $\dim(\mathrm{Im}(u))$ et $\dim(\mathrm{Im}(u^2))$.
   (b) Soit $\overrightarrow{x_0} \in E$ tel que $u^2(\overrightarrow{x_0}) \neq \overrightarrow{0}$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{x_0}, u(\overrightarrow{x_0}), u^2(\overrightarrow{x_0}))$ est une base de E.